



# مدخل الى الرياضيات

لطلبة تكنولوجيا المعلومات  
والمكتبات والعلوم الهندسية

## MATH 99

## مدخل الى الرياضيات

لطلبة تكنولوجيا المعلومات  
والمكتبات والعلوم الهندسية

## MATH 99

سنان وفان عواد



إعداد هذا الكتاب

بالاعتماد على خطة الوزارة الخاصة بالثالثات المتوسطة



9 789957 831523

مكتبة المحجوب العربي للنشر والتوزيع

الكرن - عمان - جسر الملك - في الناصب - مجمع القديس الميخائيل - طرابلس، 4982 6 493 2730  
عليه 962 79 5651920 ص ب 8244 الجسر للعربي 11121 جبل الحصين الشرايفي  
الأردن - عمان - إقامة الأردنية ش. المكتبة رانيا النبط - خليل كلية الزراعة - مجمع زعمي - حمرة الصباري

www.mu-j-arabi-pub.com

E-mail: Moj\_pub@hotmail.com







مدخل إلى الرياضيات  
لطلبة تكنولوجيا المعلومات والمكتبات  
والعلوم الهندسية

Math99



**مدخل إلى الرياضيات**  
**لطلبة تكنولوجيا المعلومات والمكتبات**  
**والعلوم الهندسية**  
**Math99**

الأستاذ

سنان وائل عوادة

ماجستير إحصاء وقياس

الطبعة الأولى

2012م - 1433هـ





رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2012/2/558)

510

عودة، سنان وإثل

مدخل إلى الرياضيات لطلبة تكنولوجيا المعلومات والمكتبات والعلوم

الهندسية/ سنان وإثل عودة. عمان. - مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع، 2012

( ) ص

ر.ا. : 2012/2/558

الواصفات، / الرياضيات/

- يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنعه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى.

### جميع حقوق الطبع محفوظة

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو أي جزء منه أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات أو نقله بأي شكل من الأشكال، دون إذن خطي مسبق من الناشر.

عمان - الأردن

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any means without prior permission in writing of the publisher .

الطبعة العربية الأولى

2012م - 1433هـ



مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع

عمان - وسط البلد - ش. السلط - مجمع الفهيم التجاري

تلفاكس 4632739، ص.ب. 8244 عمان 11121 الأردن

عمان - ش. الملكة رانيا العبد الله - مقابل بعلية الزراعة - مجمع زهدي حصوة التجاري

www: muj-arabi-pub.com

Email: Moj\_pub@hotmail.com

ISBN 978-9957-83-152-3 (ردمك)

## الإهداء

أهدي هذا العمل لكل من ساهم معي في  
إنجاحه من أفراد عائلتي وأصدقائي  
المخلصين.





## الفهرس

### first Unit

Sequence and Series ..... 13

### Second Unit

Exponential and Logarithmic Function ..... 42

### Third Unit

Polynomial Function ..... 72

### Fourth Unit

Trigometric Functions..... 139



## المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد الخلق والمرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم النبي العربي الهاشمي الأمين.

أما بعد:

بعد الاتكال على الله تم وضع هذا الكتاب في المواضيع التي تهتم بكل الذين يرقبون في دخول عالم الرياضيات الواسع حيث تعتبر المواضيع المطروحة في هذا الكتاب الأساس وهذه المواضيع هي المثاليات والمتسلسلات، اللوغاريتمات والاقترانات المثلثية حسب ما ورد في خطة الرياضيات 99 في جامعة البلقاء ولما لهذه المواضيع من أهمية فقد تناولناها بشمولية وتفصيل وبما يتناسب مع مستوى المادة وطرحنا الأمثلة لتتناسب مع جميع مستويات الطلبة.

وأخيراً أتوجه من زملائي المدرسين وأخواني الطلبة أن لا يبخلوا علينا بملاحظاتهم حول هذه الطبعة لتلافئها في الطباعات اللاحقة

والله ولي التوفيق.

المؤلف

سنان وإكل عواده

ماجستير إحصاء وقياس



**The first Unit**  
**Sequence and Series**





## The first Unit

### Sequence and Series

- 1) Sequence.
- 2) Series.
- 3) Arithmetic Sequence .
- 4) Arithmetic and Series and Summation of Arithmetic.
- 5) Geometric Sequence
- 6) Finite Geometric Series.
- 7) Infinite Geometric Series

## 1- المتتالية (Sequenc)

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

لو طرح السؤال التالي ما هو العدد الذي يأتي بعد 21

الاجابة سوف تكون 34 وذلك بسبب

ان العدد التالي هو حاصل جمع العددين السابقين بمعنى ان

المتتالية عبارة عن ترتيب من الاعداد ويرمز لكل حد منها بالرمز

(a) بمعنى ان الحد الاول للمتتالية هو  $(a_1)$  والثاني  $(a_2)$  وهكذا حتى

نصل للحد العام ويرمز له بالرمز  $(a_n)$

3 يمثل الحد الرابع عبارة عن حاصل جمع  $(1+2)$

5 يمثل الحد الخامس عبارة عن حاصل جمع  $(3+2)$

8 يمثل الحد السادس عبارة عن حاصل جمع  $(3+5)$

13 يمثل الحد السابع عبارة عن حاصل جمع  $(5+8)$

21 يمثل الحد الثامن عبارة عن حاصل جمع  $(13+8)$

بالتالي فان الحد التاسع المطلوب ايجاده هو 34 ناتج عن جمع  $(13+21)$

اذا كان بالمستطاع ايجاد الحد العام للمتتالية بدلالة  $(n)$  فيمكن ايجاد اي

حد داخل هذه المتتالية بالاعتماد على حدها العام بشرط معرفة ترتيب ذلك الحد

مثال:

1, 3, 6, 10, 15, ....

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{where } n=1,2,3,4,\dots$$

ومن الجدير بالذكر انه يمكن التأكد من ذلك بالتعويض بأي حد داخل المتتالية وذلك بتعويض بالمتسلسلة الاصلية كالتالي:

$$a_1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$a_3 = \frac{3(3+1)}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

وهكذا

مثال:

جد الحد العام والحد العاشر للمتتالية غير المنتهية (infinite)

a      1, 4, 9, 16, ....

	↓	↓	↓	↓
n	1	2	3	4

$$a_n = n^2$$

$$a_{10} = 10^2 = 100$$

مثال:

جد الحدود العشرة الأولى للمتتالية

$$a_n = \frac{n}{(n+1)}$$

$$a_1 = \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{(1+2)} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{(1+3)} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{4}{(1+4)} = \frac{4}{5}$$

$$a_5 = \frac{5}{(1+5)} = \frac{5}{6}$$

$$a_6 = \frac{6}{(6+1)} = \frac{6}{7}$$

$$a_7 = \frac{7}{(1+7)} = \frac{7}{8}$$

$$a_8 = \frac{8}{(1+8)} = \frac{8}{9}$$

$$a_9 = \frac{9}{(1+9)} = \frac{9}{10}$$

$$a_{10} = \frac{10}{(1+10)} = \frac{10}{11}$$

مثال:

جد الحد العام للمتتاليات غير المنتهية (infinity)

1)  $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$

2)  $-1, -4, -9, -16, -25, -36, \dots$

3)  $1, 8, 27, 64, 125, \dots$

1)  $a_n = -\frac{1}{n}$

2)  $a_n = -n^2$

3)  $a_n = n^3$

رمز المجموع ( $\Sigma$ ): هو رمز

أغريقي نستخدمه ليبدل على ناتج جمع عدد

من الأعداد مثال لو اردنا التعبير عن

مجموع الأعداد

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \sum_{r=1}^{100} r$$

## (2) المتسلسلات (Series)

4, 6, 8, 10, 12



1 2 3 4 5

الحد العام

$$a_n = 2n$$

المتسلسلة هي كالآتي

$$2+4+6+8+10$$

تعريف المتسلسلة اذا كانت  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  متتالية فان

متسلسلة وتكتب على النحو التالي

$$\sum_{r=1}^n a_r = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

وتسمى المتسلسلة المرتبطة بهذه المتتالية وهذا يؤدي الى

اذا كانت المتتالية منتهية فان المتسلسلة المرتبطة بها منتهية

اذا كانت المتتالية غير منتهية فان المتسلسلة المرتبطة بها غير

منتهية

مثال:

1, 8, 27, ....., 1000

$$a_1 = 1^3, a_2 = 2^3, \dots, a_{10} = 10^3$$

$$a_n = n^3$$

وباعتبار ان الحد الاخير للمتتالية هو  $a_{10} = 10^3 = 1000$  وبما ان  $n$  تعبر

عن رتبة الحد الاخير في هذه المتتالية فان  $n=10$

$$1 + 8 + 27 + \dots + 1000 = \sum_{n=1}^{10} n^3$$

مثال:

استخدم رمز المجموع لتعبير عن المتسلسلة المرتبطة بالمتتالية

$$2, 5, 10, 17, \dots = a_n = n^2 + 1$$

وعليه فإن المتسلسلة المرتبطة بها تعطى بالعلاقة التالية:

$$2 + 5 + 10 + 17 + \dots$$

$$a_n = \sum_{n=1}^{10} (n^2 + 1)$$

مثال:

استخدم رمز المجموع لتعبير عن المتسلسلة المرتبطة بالمتتالية

$$2, 5, 10, 17, \dots,$$

$$a_n = n^2 + 1$$

مثال:

اكتب مفكوك المتسلسلة المنتهية

$$\sum_{n=1}^5 (3n - 2)$$

$$\sum_{n=1}^5 (3n - 2) = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$$

(3) المتاليات الحسابية (Arithmetic Sequence)

$$20, 25, 30, 35, 40$$



نلاحظ ان الفرق ثابت بين الحدود السابقة بمعنى

$$25-20=5$$

$$30-25=5$$

$$35-30=5$$

$$40-30=5$$

ان مثل هذه المتتاليات تسمى بالمتتاليات الحسابية وذلك يرجع لان الفرق بين كل حد والحد السابق له مقدار ثابت وهذا الفرق يسمى ب اساس المتتالية (d) والحد الاول بالرمز (a)

الحد الاول

$$a_1 = a = 20$$

الحد الثاني

$$a_2 = 25 = a + 5 = 25$$

or

$$a_2 = a + d(2 - 1) = a + d = 25$$

الحد الثالث

$$a_3 = 30 = a + (3 - 1)d = a + 2d$$

الحد الخامس

$$A_5 = 40 = a + (5 - 1)d = a + (n - 1)d$$

المتتالية الحسابية عبارة عن مجموع متتالية يكون الفرق بين كل حد فيها والحد السابق له مباشرة يساوي مقدارا ثابتا يسمى هذا الفرق بأساس المتتالية الحسابية ويرمز له بالرمز  $d$  ويرمز للحد الاول فيها بالرمز  $a$

مثال:

بين ان المتتالية

$$4, 7, 10, \dots$$

هي متتالية حسابية ثم جد حدها العام

بما ان الفرق بين اي حدين متتالين هو مقدار ثابت (3) فاننا نعتبرها متتالية حسابية وللتأكد من ذلك بدرس الفرق بين كل حدين متالين

$$7 - 4 = 3$$

$$10 - 7 = 3$$

$$a = 4$$

$$a_n = a + (n - 1)d = 4 + (n-1)3 = 3n + 1$$

مثال

جد الحد العام لتسلسلة حسابية اساسها 3 وحدها الاول 1

الحد الاول (a) هو 1

← مدخل إلى الرياضيات

الاساس (d) هو 3

بالتالي

$$a_n = a + (n - 1)d = 1 + (n-1)3 = 3n - 2$$

مثال

جد الحد العام لتسلسلة حسابية اساسها 4 وحدها الاول 5

الحد الاول (a) هو 5

الاساس (d) هو 4

بالتالي

$$a_n = a + (n - 1)d = 5 + (n-1)4 = 4n + 1$$

مثال:

بين ان المتتالية ..... 3,7,11,

هي متتالية حسابية ثم جد حلدها العام

بما ان الفرق بين اي حدين متتالين هو مقدار ثابت (4) فاننا نعتبرها

متتالية حسابية وللتأكد من ذلك سيتم دراسة الفرق بين كل حدين متتالين

$$7 - 3 = 4$$

$$11 - 7 = 4$$

$$a = 3$$

$$a_n = a + (n - 1)d = 3 + (n-1)4 = 4n - 1$$

#### (4) المتسلسلات الحسابية (Arithmetic Series)

يقال ان هناك عالم رياضيات اسمه جاوس كان طالبا مشاغبا وارد المدرس تاديبه من خلال الطلب منه ان يوجد مجموع الاعداد الصحيحة من 1 وحتى 100 عقابا له على سلوكه السيء وتوقع المدرس ان يحتاج كامل الحصة لحساب هذا المجموع الا انه تفاجئ بان جاوس احتاج الى دقائق معدودة لايجاد هذا المجموع والذي يساوي 5050 هذه ليست قصة لتسلية ولكن هذا كان الاساس لظهور ما يسمى بالمتسلسلة الحسابية

توصل جاوس الى المجموع بالطريقة التالية

$$c = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \dots\dots\dots (1)$$

وهذا يعبر عن مجموع الاعداد من 1 وحتى 100 بمعنى انه قام بوضعهم في متسلسلة اولها 1 واخرها 100 واساسها 1، وكذلك الفرق بين اي حدين متتاليين هو مقدار ثابت يساوي 1 وبما ان الجمع عملية تبديلة قام بكتابة المتسلسلة بطريقة معكوسة

$$c = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \dots\dots\dots(2)$$

ثم جمع المعادلتين (1) و(2)

$$c = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

+

$$c = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$$

ينتج

$$c = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

$$2c = 101 \times 100$$

$$\frac{2c}{2} = \frac{101 \times 100}{2}$$

$$c = \frac{10010}{2} = 5050$$

تعد طريقة جاوس في حل هذه المسألة الأساس لايجاد مجموع أول  $(n)$  من حدود متسلسلة حسابية معلومة

$$a_1 = a$$

$$c_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

وعند عكس ترتيب الحدود

$$c_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

عند جمع الحدود ينتج

$$c_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

$$c_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

$$2c_n = n(a_1 + a_n)$$

$$2 \frac{c_n}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$c_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

ويمكن إيجاد  $n$  حد من متسلسلة حدها الأول وحدها الأخير معلومين أما إذا كان الحد الأخير غير معلوم فيمكن الاستعاضة عنه بالصيغة التالية

$$c_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)d)$$

مثال

أوجد مجموع المتسلسلة الآتية

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29$$

المتسلسلة حسابية لاحظ أن الفرق بين كل حد والذي يسبقه هو مقدار ثابت حيث:

$$5-2=3 \quad 8-5=3 \quad 11-8=3 \quad 14-11=3 \quad 17-14=3 \quad 20-17=3 \quad \dots \quad 29-26=3$$

بتالي فإن الفرق ( $d$ ) هو 3

والحد الأول هو  $2(a)$

وعدد الحدود ( $n$ ) هو 10

بالتالي حسب القانون

$$c_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{10}{2}(2 + 29) = 5(31) = 155$$

مثال

أوجد مجموع المتسلسلة الآتية

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$$

المتسلسلة حسابية يلاحظ بان الفرق بين كل حد والذي يسبقه هو مقدار

ثابت

$$5-3=2 \quad 7-5=2 \quad \dots \quad 17-15=2$$

بتالي فان الفرق (d) هو 2

والحد الاول هو 3(a)

وعدد الحدود (n) هو 8

بالتالي حسب القانون

$$c_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{8}{2}(3 + 17) = 4(20) = 80$$

مثال

اوجد مجموع المتسلسلة الاتية

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18$$

المتسلسلة حسابية لاحظ ان الفرق بين كل حد والذي يسبقه هو مقدار

ثابت لاحظ

$$6-3=3 \quad 9-6=3 \dots 18-15=3$$

بتالي فان الفرق هو (d) هو 3

والحد الاول هو 3(a)

وعدد الحدود (n) هو 6

$$c_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{6}{2} (3 + 18) = 3(21) = 63$$

### (Geometric Sequence) المتتالية الهندسية (5)

هي المتتالية التي يكون فيها النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة

نسبة ثابتة تسمى بأبواب المتتالية ويرمز له بالرمز  $(r)$  والحد الأول  $(a)$

مثال:

3 , 6 , 12 , 24

المتتالية يكون أساسها  $(r=3)$  والحد الأول  $(a=3)$

$$a_1 = 3 = a \times r^0 = a = 3$$

$$a_2 = 6 = a \times r^1 = 3 \times 2 = 6$$

عندما نتحدث عن الأس فهذا يعني ضرب

العدد بنفسه عدد مرات الأس بمعنى

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$a_3 = 12 = a \times r^2 = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$$

$$a_4 = 24 = a \times r^3 = 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$$



$$a_n = a \times r^{(n-1)}$$

بتالي فان الشكل العام لتسلسلة هندسية اساسها (r) وحدها الاول (a)

$$a, a \times r, a \times r^2, a \times r^3, \dots, a \times r^{(n-1)}$$

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{(n-1)}$$

ولتعيين اي متتالية حسابية يكفي معرفة الحد الاول والاساس

مثال:

اكتب الحدود الخمسة الاولى لمتتالية هندسية اساسها 3 وحدها الاول 2

$$a_1 = a \times r^0 = a = 2$$

$$a_2 = a \times r^1 = 2 \times 3 = 6$$

$$a_3 = a \times r^2 = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

$$a_4 = a \times r^3 = 2 \times 3^3 = 2 \times 27 = 54$$

$$a_5 = a \times r^4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$$

مثال

اكتب الحدود الاربعة الاولى لمتتالية هندسية اساسها 4 وحدها الاول 1

$$a_1 = a \times r^0 = a = 1$$

$$a_2 = a \times r^1 = 1 \times 4 = 4$$

$$a_3 = a \times r^2 = 1 \times 4^2 = 1 \times 16 = 16$$

$$a_4 = a \times r^3 = 1 \times 4^3 = 1 \times 64 = 64$$

## (6) المتسلسلات الهندسية المنتهية (Finite Geometric Series)

عرفنا المتتالية الهندسية التي أساسها (r) وحدها الأول (a)

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{(n-1)}$$

بالتالي فإن المتسلسلة الهندسية

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{(n-1)}$$

لايجاد مجموع أول n حد افرض ان

$$c_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{(n-1)} \dots (1)$$

ويضرب المعادله 1 باساس المتتالية ينتج

$$rc_n = ra + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n \dots (2)$$

ويطرح المعادلة 1 من 2 ينتج

$$rc_n = ra + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n$$

$$c_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{(n-1)}$$

---


$$(r-1)c_n = (ra - a) + (ar^2 - ar) + (ar^3 - ar^2) + (ar^4 - ar^3) + \dots + (ar^n - ar^{n-1})$$

$$= a(r-1) + ar(r-1) + ar^2(r-1) + ar^3(r-1) + \dots + ar^{n-1}(r-1)$$

$$(r-1)c_n = a(r^n - 1)$$

$$(r-1) \frac{c_n}{(r-1)} = \frac{a}{(r-1)} (r^n - 1)$$

$$c_n = \frac{a}{(r-1)} (r^n - 1)$$

بشرط ان الاساس لا يساوي 1

اما اذا كان الاساس يساوي 1 فان

$$c_n = a + a + a + a + \dots + a = a \times n$$

$$c_n = a \times n$$

مثال:

جد مجموع الحدود الستة الاولى من المتسلسلة

$$64+32+16+\dots$$

هذه المتسلسلة هندسية حدها الاول 64 والاساس  $\frac{1}{2}$  بالتالي فان المجموع

يساوي

$$c_6 = \frac{a}{(r-1)} (r^6 - 1) = \frac{64}{(\frac{1}{2}-1)} ((\frac{1}{2})^6 - 1) = \frac{64}{-\frac{1}{2}} ((\frac{1}{2})^6 - 1) = 2(63) = 126$$

مثال:

جد مجموع الحدود الخمسة الاولى من المتسلسلة

$$2+4+6+\dots$$

مدخل إلى الرياضيات →

هذه المتسلسلة هندسية حدها الأول 2 والاساس 2 بالتالي فإن المجموع  $c_n$  يساوي

$$c_5 = \frac{a}{(r-1)}(r^5 - 1) = \frac{2}{(2-1)}((2)^5 - 1) = \frac{2}{1}(32 - 1) = 2(31) = 62$$

(7) المتسلسلات الهندسية الغير منتهية

## (Infinite Geometric Series)

عرفنا في البند السابق ان مجموع  $\pi$  حداً في متسلسلة هندسية حدها الاول  $(a)$  واساسها  $(r)$  تعطى بالعلاقة التالية:

$$c_n = \frac{a}{(r-1)}(r^n - 1)$$

السؤال المطروح هل يمكننا ايجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية للاجابة عن هذا السؤال يتم في حالة واحدة فقط وهي ان تكون المتسلسلة متقاربة ولكن ما معنى ان المتسلسلة متقاربة وسيوضح ذلك بالمثال التالي:

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

لاحظ من خلال هذه المتسلسلة:

الحد الاول يساوي 2 والاساس يساوي  $\frac{1}{4}$  كلما زادت قيمة  $\pi$  فان حدود المتسلسلة تتناقص قيمتها بمعنى ان قيمة  $r^n$  تتناقص كلما زادت قيمة  $\pi$  بحيث تقترب من الصفر وذلك يعني ان مجموع المتتالية يقترب من القيمة  $\frac{a}{(1-r)}$  ومثل هذه المتسلسلات تسمى بالمتسلسلات غير المنتهية المتقاربة اما اذا كانت غير متقاربة فان مجموعها يساوي  $\infty$  او  $-\infty$  تكون المتسلسلة الهندسية غير منتهية التي حدها الاول  $a$  واساسها  $r$  متقاربة اذا

← مدخل إلى الرياضيات

كانت  $(-1 < r < 1)$  ويكون مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية متقاربة هو:

$$C_{\infty} = \frac{a}{(1-r)}$$

أما إذا كانت قيمة  $(r > 1)$  أو قيمة  $(-1 > r)$  فإن المتسلسلة الهندسية غير متقاربة

مثال:

جد مجموع المتسلسلة

$$0.3 + 0.03 + 0.003 + \dots$$

$$r = \frac{0.03}{0.3} = 0.1$$

لاحظ أن قيمة الأساس يقع ضمن الفترة  $(-1 < r < 1)$  إذاً فإن مجموع

المتسلسلة هو

$$C_{\infty} = \frac{a}{(1-r)} = \frac{0.3}{(1-0.1)} = \frac{1}{3}$$

مثال:

جد مجموع المتسلسلة:

$$0.2 + 0.02 + 0.002 + \dots$$

$$r = \frac{0.02}{0.2} = 0.1$$

لاحظ أن قيمة الأساس يقع ضمن الفترة  $(-1 < r < 1)$  إذاً فإن مجموع

المتسلسلة هو:

$$C_{\infty} = \frac{a}{(1-r)} = \frac{0.2}{(1-0.1)} = \frac{0.2}{0.9} = \frac{2}{9}$$

## Examples of Sequence & Series

السؤال الأول: اكتب الحدود الثلاثة الأولى لتسلسلة التالية:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{(1-2r)}$$

الحل

$$a_1 = \frac{1}{(1-2(1))} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = 1$$

$$a_2 = \frac{2}{(1-2(2))} = \frac{2}{1-4} = \frac{2}{-3}$$

$$a_3 = \frac{3}{(1-2(3))} = \frac{3}{1-6} = \frac{3}{-5}$$

السؤال الثاني: اكتب الحدود الثلاثة الأولى لتسلسلة التالية:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(1-3r)}$$

الحل

$$a_1 = \frac{1}{(1-3(1))} = \frac{1}{1-3} = \frac{1}{-2}$$

$$a_2 = \frac{1}{(1-3(2))} = \frac{1}{1-6} = \frac{1}{-5}$$

$$a_3 = \frac{1}{(1-3(3))} = \frac{1}{1-9} = \frac{1}{-8}$$

السؤال الثالث: استخدم رمز المجموع ( $\Sigma$ ) لتعبير عن المتسلسلات التالية:

$$1) 3+5+7+9+11+13$$

$$2) \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81}$$

الحل

$$1) 3+5+7+9+11+13$$

$$\begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$a_1 = 3 = 2(1) + 1$$

$$a_2 = 5 = 2(2) + 1$$

$$a_3 = 7 = 2(3) + 1$$

$$a_n = 2n + 1$$

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \sum_{r=1}^6 2r + 1$$

$$2) \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ n & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$a_1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$$

$$a_2 = \frac{2}{9} = \frac{2}{3^2}$$

مدخل إلى الرياضيات

$$a_3 = \frac{3}{27} = \frac{3}{3^3}$$

$$a_n = \frac{n}{3^n}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} = \sum_{r=1}^6 \frac{r}{3^r}$$

السؤال الرابع: اوجد الحد العام للمتتاليات التالية لتعبير عن المتسلسلات التالية:

1) 1, -1, 1, -1

2)  $\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{16}$

الحل

1) 1, -1, 1, -1

	↓	↓	↓	↓
n	1	2	3	4

$$a_1 = 1 = (-1)^0$$

$$a_2 = -1 = (-1)^1$$

$$a_3 = 1 = (-1)^2$$

..

$$a_n = (-1)^{n-1}$$



$$2) \frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{16}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ n & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$a_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{(2^1)} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{(-1)^{2-1}}{(2^2)} = \frac{-1}{4}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^{3-1}}{(2^3)} = \frac{(-1)^2}{8} = \frac{-1}{8}$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2^{n-1})}$$

السؤال الخامس: أوجد الحد الرابع والحد الأول للمتسلسلة

$$\sum_{r=1}^{30} 4r - 1$$

الحل:

$$a_1 = 4(1) - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_4 = 4(4) - 1 = 16 - 1 = 15$$

السؤال السادس: أوجد الحد الثالث والحد الأول للمتسلسلة

$$\sum_{r=1}^{30} 3r - 2$$

الحل

$$a_1 = 3(1) - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$a_3 = 3(3) - 2 = 9 - 2 = 7$$

السؤال السابع: جد الحد العام للمتتالية الحسابية التالية

1) حدها الأول 2 وأساسها 3

2) أساسها 5 وحدها الثاني 12

3) أساسها 6 وحدها الأول 3

الحل: القانون العام هو:

$$a_n = a + (n - 1)d$$

1)  $a_n = 2 + (n - 1)3 = 2 + 3n - 3 = 2n - 1$

2)  $a_n = a + (n - 1)d$

$$a_1 = a_2 - 5 = 12 - 5 = 7$$

$$a_n = 7 + (n - 1)5 = 7 + 5n - 5 = 2 + 5n$$

$$= 2 + 5n$$

3)  $a_n = 3 + (n - 1)6 = 3 + 6n - 6 = 6n - 3$

السؤال الثامن: جد الأساس والحد الأول للمتتالية الحسابية والمعادلة

للحد العام  $a_n$  التالية

1)  $a_n = 2n - 5$

2)  $a_n = \frac{-1}{2}n + 7$

الحل

1)  $2n - 2 - 5 + 2$

$$2(n-1) - 3$$

$$= 2n - 2 - 5 + 2 = 2(n-1) - 3 = -3 + 2(n+1)$$

الحد الأول -3 والاساس 2

$$2) a_n = \frac{-1}{2}n + 7 = \frac{-1}{2}n + 7 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-1}{2}n + \frac{1}{2} + 7 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-1}{2}(n+1) + 6.5 = 6.5 + (n+1)\left(\frac{-1}{2}\right)$$

الحد الأول 6.5 والاساس  $\frac{-1}{2}$

السؤال التاسع: بين ان المتتالية التالية هندسية ثم جد الحد السادس

$$3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}$$

المتتالية هندسية واساسها  $\frac{1}{3}$  وحدها الأول 3

$$a_n = ar^{n-1} = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

السؤال لعاشر: بين ان المتتالية التالية هندسية ثم جد الحد الخامس

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

المتتالية حسابية واساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها الاول 2

$$a_n = ar^{n-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_5 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

السؤال الحادي عشر: جد مجموع المتتالية الهندسية التي حدها الاول

16 واساسها ثم جد الحد السادس  $-\frac{1}{2}$  وعدد حدودها 5

$$c_5 = \frac{a(r^5-1)}{(r-1)}$$

$$c_5 = \frac{16\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5-1\right)}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)}$$

$$c_5 = \frac{16\left(\frac{1}{32}-1\right)}{(-1.5)}$$





# **The Second Unit**

## **Exponential and Logarithmic Function**





## The Second Unit

### Exponential and Logarithmic Function

- 1) Exponential and Logarithmic Function and Logarithmic Base 10
- 2) Graphs of Exponential and logarithm Function .
- 3) Natural Exponential Function
- 4) Natural Logarithms base e.
- 5) Logarithms Laws



## 1) Exponential and Logarithmic Function and Logarithmic Base 10

Def of Exponential and Logarithmic Function s

يسمى الاقتران (f) المعروف بالقاعده

$$f(x) = a^x \quad x \in R \quad a > 0 \text{ and } a \neq 1$$

بالاقتران الاسي (Exponential Functions)

**Examples:**

$$1) f(x) = 2^x$$

$$2) f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$3) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$4) f(x) = (5)^x$$

تعريف الاقتران: هو علاقة تربط كل عنصر بالمجال (domain) x

بعنصر واحد بالمدى (range)

$$1) f(x) = 2^x$$

$$f(1) = 2^1 = 2$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(3) = 2^3 = 8$$

$$2) f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$$

$$f(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$f(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$3) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

مجال الاقتران الاسي ( Domain of Exponential function ) دائما  
 يكون ككل الاعداد التي تنتمي لمجموعة الاعداد الحقيقية  
 (Real number (R))

مدى الاقتران الاسي ( Range of Exponential function ) دائما يكون  
 كل الاعداد التي تنتمي لمجموعة الاعداد الحقيقية الوجبة ( Positive )  
 (Real number (R<sup>+</sup>))

الاقتران الاسي (Exponential function) يكون متزايد ( increasing )  
 اذا كان الاساس اكبر من 1

الاقتران الاسي (Exponential function) يكون متناقص ( decreasing )  
 اذا كان الاساس اقل من 1

وسيتم توضيح ذلك من خلال الرسم

Def of Logarithmic Functions

If  $a > 0$  and  $a \neq 1$  then

$$y = \log_a(x)$$



الاساس

مجال الاقتران اللوغرتمي (Domain of Logarithmic Function) دائما يكون كل الاعداد التي تنتمي لمجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة (Positive Real number ( $R^+$ ))

مدى الاقتران اللوغرتمي ((Range of Logarithmic Function) دائما يكون كل الاعداد التي تنتمي لمجموعة الاعداد الحقيقية (Real number ( $R$ )).

**Example:**

$$\log_2(32) = \log_2(2)^5 = 5$$

$$\log_3(81) = \log_3(3)^4 = 4$$

$$\log_7(49) = \log_7(7)^2 = 2$$

$$\log_2(2) = \log_2(2)^1 = 1$$

$$\log_1(20) = \log_1(20)^1 = 20$$

$$\log_1(10) = \log_1(10)^1 = 10$$

$$\log_1(5) = \log_1(5)^1 = 5$$

$$\log_4(16) = \log_4(4)^4 = 4$$

Def of Logarithmic Function Base to 10

If  $a = 10$  then

$$y = \log_{10}(x)$$



10 = الأساس

وتعتبر هذه اللوغرتمات الاكثر شيوعا وتكتب للاختصار  $\log$

**Example:**

$$\log_{10}(100) = \log_{10}(10)^2 = 2$$

$$\log_{10}(1000) = \log_{10}(10)^3 = 3$$

$$\log_{10}(10000) = \log_{10}(10)^4 = 4$$

$$\log_{10}(100) = \log_{10}(10)^2 = 2$$

$$\log_{10}(10) = \log_{10}(10)^1 = 1$$

$$\log_{10}1 = \log_{10}(10)^0 = 0$$

$$\log_{10}0.1 = \log_{10}(10)^{-1} = -1$$

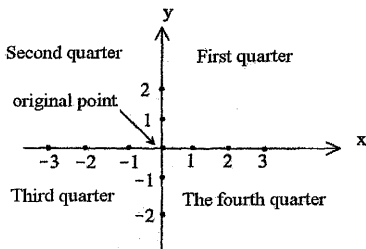
$$\log_{10}0.01 = \log_{10}(10)^{-2} = -2$$

$$\log_{10}0.001 = \log_{10}(10)^{-3} = -3$$

Exponential	Base	Power	Logarithm
$3^4 = 81$	3	4	$4 = \log_3 81$
$7^2 = 49$	7	2	$2 = \log_7 49$
$5^4 = 625$	5	4	$4 = \log_5 625$
$6^3 = 216$	6	3	$3 = \log_6 216$
$8^2 = 64$	8	2	$2 = \log_8 64$
$x^y = a$	X	y	$y = \log_x a$

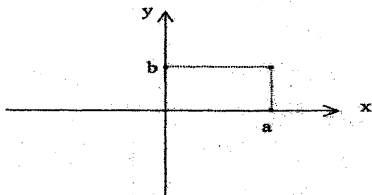
## 2) Graphs of Exponential and logarithm Functions

المستوى الديكارتي والاحداثيات



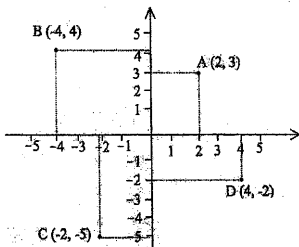
كيفية تمثيل الاحداثيات في المستوى الديكارتي

النقطة  $(a, b)$  يتم تمثيلها على المنحنى كالآتي:



عين الأزواج المرتبة

$A(2,3)$  ,  $B(-4,4)$  ,  $C(-2,-5)$  ,  $D(4,-2)$



Graph of Exponential Function

ارسم منحنى الاقتران المعطى بالقاصده التالية

$$f(x) = 2^x$$

$$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

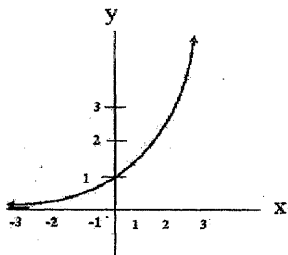
$$f(3) = 2^3 = 8$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(1) = 2^1 = 2$$

$$f(0) = 2^0 = 1$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



ملاحظات على الشكل الناتج

$$f(0) > 0 \text{ قيم}$$

$$f(0) = 1 \text{ عندما } (x=0) \text{ فان}$$

تزداد (increasing) بازدياد قيم x



ارسم منحنى الاقتران المعطى بالقاعده التاليه

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$$

$$g(-3) = (2)^{-(-3)} = 2^3 = 8$$

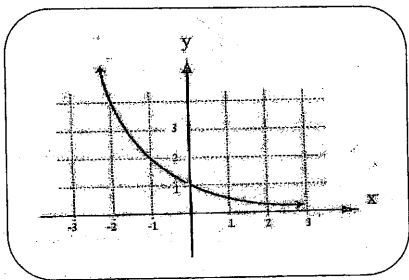
$$g(3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$g(-2) = (2)^{-(-2)} = 2^2 = 4$$

$$g(2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$g(-1) = (2)^{-(-1)} = 2 = 2$$

$$g(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$



ملاحظات على الشكل الناتج

$$L(0) < 0 \text{ قيم}$$

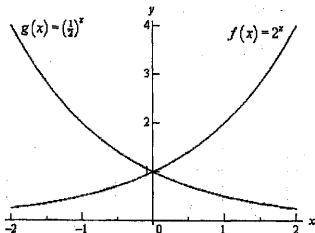
$$L(0)=1 \text{ فان } (x=0) \text{ عندما}$$

تتناقص (decreasing) بازدياد قيم  $x$

نلاحظ ان:

$$f(x)=L(-x)$$

بمعنى ان  $L(x)$  هو انعكاس  $L$  على  $f(x)$  على محور  $y$



## Graph of logarithm Function

ارسم منحنى الاقتران المعطى بالقاعده التاليه

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \log_2 (2)^{-2} = -2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \log_2 (2)^{-1} = -1$$

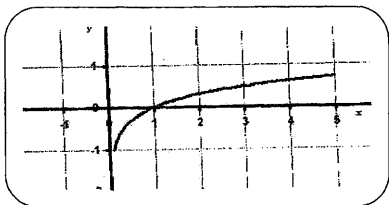
$$f(1) = \log_2 1 = \log_2 (2)^0 = 0$$

$$f(2) = \log_2 2 = \log_2 (2)^1 = \log_2 (2)^1 = 1$$

$$f(4) = \log_2 4 = \log_2 (2)^2 = 2$$

$$f(8) = \log_2 8 = \log_2 (2)^3 = 3$$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
f(x)	-2	-1	0	1	2	3

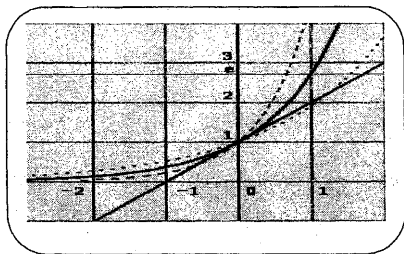


### 3) Natural Exponential Function

هو اقتران اسي ولكن اساسه العدد النيبيري (e) ولكن ما هو العدد النيبيري

$$e \approx 2.71828$$

قيمة العدد النيبيري هي قيمة تقريبه لا نستطيع حساب هذه القيمة بدقة



1)  $e^2 = 7.3890561$

2)  $e^{-1} = 0.3678794$

3)  $e^0 = 1$

مثال ارسم منحنى الاقتران

$$f(x) = 1 - 5e^{1-\frac{x}{2}}$$

نختار الاعداد التالية 1,0,-1,2,-2,3 ونجدد صورهم في الاقتران

$$f(-2) = 1 - 5e^{1-\frac{-2}{2}} = 1 - 5e^2 = -35.9453$$

$$f(-1) = 1 - 5e^{1-\frac{-1}{2}} = 1 - 5e^{1.5} = -21.4084$$

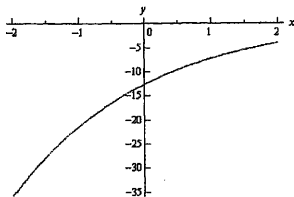
$$f(0) = 1 - 5e^{1-0} = 1 - 5e^1 = -12.5914$$

$$f(1) = 1 - 5e^{1-\frac{1}{2}} = 1 - 5e^{0.5} = -7.2436$$

$$f(2) = 1 - 5e^{1-\frac{2}{2}} = 1 - 5e^0 = -4$$

$$f(3) = 1 - 5e^{1-\frac{3}{2}} = 1 - 5e^{-0.5} = -2.0327$$

X	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-35.9453	-21.4084	-12.5914	-7.2436	-4	-2.0327



#### 4) Natural Logarithms base e

هو اقتران اساسه e وتسمى مثل هذه الاقتران بالاقتران اللوغرثمى الطبيعي

ويرمز له بالرمز  $\ln$

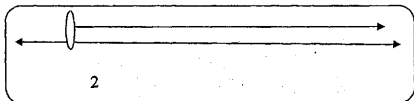
$$1) \ln 2 = 7.3890561$$

$$2) \ln 0.3 = -1.2039$$

مثال اوجد مجال الاقتران

$$f(x) = \ln(x - 2)$$

الاقتران  $f(x)$  يكون معرف عندما  $(x-2 > 0)$  بتالي فان



$$x > 2$$

بالتالي مجال  $f$  هو  $(2, \infty)$

مثال اوجد مجال الاقتران

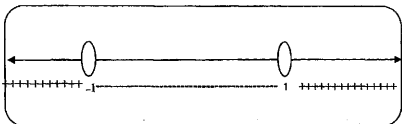
$$f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

الاقتران  $f(x)$  يكون معرف عندما  $x^2 - 1 > 0$

$$(x + 1)(x - 1) > 0$$

$$(x + 1) = 0 \rightarrow x = -1$$

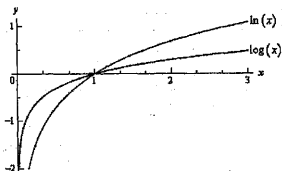
$$(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1$$



بتالي مجال  $f$  هو  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

ويمكن توضيح العلاقة بين اللوغاريتم  $(\log)$  اللوغاريتم للأساس  $e$   $(\ln)$  من

خلال الشكل



## 5) Logarithms Laws

1)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3)  $\log_a x^n = n \log_a x$

4)  $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

5)  $\log_a a^x = x$

6)  $\log 1 = 0$

7)  $\log_a a = 1$

مثال اذا كان  $\log_3 2 \approx 0.6309$  اوجد

1)  $\log_3 8$

2)  $\log_3 9$

3)  $\log_3 10 - \log_3 5$

باستخدام القانون (3)

$$\log_3 8 = \log_3 2^3$$

$$= 3 \log_3 2$$

$$= 3(0.6309) = 1.8927$$

$$2) \log_3 9 = \log_3 3^2$$

$$= 2 \log_3 3$$

$$= 2(1) = 2$$



$$3) \log_3 10 - \log_3 5 = \log_3 \frac{10}{5}$$

$$\log_3 \frac{10}{5} = \log_3 2 = 0.6309$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{1}{2}(\log_3 900 - \log_3 225) &= \frac{1}{2} \log_3 900 - \frac{1}{2} \log_3 225 \\ &= \log_3 (900)^{\frac{1}{2}} - \log_3 (225)^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_3 30 - \log_3 15 = \log_3 \frac{30}{15} = \log_3 2 \\ &= 0.6309 \end{aligned}$$

طريقة اخرى

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\log_3 900 - \log_3 225) &= \frac{1}{2} \log_3 \frac{900}{225} = \frac{1}{2} \log_3 4 = \log_3 4^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_3 2 = 0.6309 \end{aligned}$$

$$5) \log_3 60 - \log_3 30 = \log_3 \frac{60}{30}$$

$$\log_3 \frac{60}{30} = \log_3 2 = 0.6309$$

$$= 0.6309$$

**Examples of Exponential and Logarithmic Function**

السؤال الأول: اوجد قيمة اللوغاريتمات التالية:

$$1 - \log_{10}(1000) = \log_{10}(10)^3 = 3$$

$$2 - \log_{10}(0.01) = \log_{10}(10)^{-2} = -2(1) = -2$$

$$3 - \log_3(3) = 1$$

$$4 - \log_{10}(100) = \log_{10}(10)^2 = 2$$

$$5 - \log_{10}(0.1) = \log_{10}(10)^{-1} = -1(1) = -1$$

$$6 - \log_4(16) = \log_4(4)^4 = 4(1) = 4$$

$$7 - \log_8(64) = \log_8(8)^2 = 2$$

$$8 - \log_6(36) = \log_6(6)^2 = 2$$

$$9 - \log_9(99) = \log_9(9)^2 = 2$$

$$10 - \log_7(343) = \log_7(7)^3 = 3$$

$$11 - \log_{11}(1331) = \log_{11}(11)^3 = 3$$

السؤال الثاني

إذا كان  $\log_3 2 \approx 0.6309$  أوجد

باستخدام القانون (3)

$$1) \log_3 4 = \log_3 2^2$$

$$= 2 \log_3 2$$

$$= 2(0.6309) = 1.2618$$

$$2) \log_3 81 = \log_3 3^4$$

$$= 4 \log_3 3$$

$$= 4(1) = 4$$

$$3) \log_3 16 = \log_3 2^4$$

$$= 4 \log_3 2$$

$$= 4(0.6309) = 2.5236$$

$$4) \log_3 27 = \log_3 3^3$$

$$= 3 \log_3 3$$

$$= 3$$

السؤال الثالث: إذا كان

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

اوجد

$$1 - f(0) \quad 2 - f(1) \quad 3 - f(2) \quad 4 - f(3)$$

$$5 - f(4) \quad 6 - f(5) \quad 7 - f(6) \quad 8 - f(7)$$

$$1 - f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$2 - f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$3 - f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$4 - f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$5 - f(4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$6 - f(5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$7 - f(6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$8 - f(7) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{132}$$

إذا كان

$$f(x) = (2)^{x^2}$$

اوجد

$$1 - f(0) \quad 2 - f(1) \quad 3 - f(2) \quad 4 - f(3)$$

$$5 - f(-1) \quad 6 - f(-2)$$

$$1 - f(0) = (2)^{0^2} = (2)^0 = 1$$

$$= (2)^1 = 2$$

$$2 - f(1) = (2)^{1^2}$$

$$3 - f(2) = (2)^{2^2} = (2)^4 = 16$$

$$= (2)^9 = 512$$

$$4 - f(3) = (2)^{3^2}$$

$$5 - f(-1) = (2)^{-1^2} = (2)^1 = 2$$

$$= (2)^4 = 16$$

$$6 - f(-2) = (2)^{-2^2}$$

السؤال الرابع: أوجد قيمة  $x$  في المعادلات التالية

$$1) x = \log_5 125$$

$$x = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

بالتالي فإن قيمة  $x$  تساوي 3

$$2) -4 = \log_2 x$$

$$2^{-4} = \frac{1}{16} \text{ تساوي } x \text{ تساوي}$$

$$3) 2 = \log_3 x$$

$$3^2 = 9 \text{ تساوي } x \text{ تساوي}$$

$$4) \frac{1}{2} = \log_3 x$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ تساوي } x \text{ تساوي}$$

$$5) \frac{1}{2} = \log_4 x$$

$$4^{\frac{1}{2}} = 2 \text{ تساوي } x \text{ تساوي}$$

$$6) x = \log_9 81\sqrt{3}$$

$$81\sqrt{3} = 3^4 \times 3^{0.5} = 3^{\frac{8}{2} + \frac{1}{2}} = 3^{\frac{9}{2}} = \frac{3^9}{3^2} = \frac{3^9 \times 2}{3^2 \times 2} = 3^{\frac{9 \times 2}{4}} = (3^2)^{\frac{9}{4}} = (9)^{\frac{9}{4}}$$

$$x = \log_9 (9)^{\frac{9}{4}}$$

بالتالي فإن قيمة  $x$  تساوي  $\frac{9}{4}$

$$7) x = \log_3 243$$

$$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

$$x = \log_3 243 = \log_3 3^5$$

بالتالي فإن قيمة  $x$  تساوي 5

$$8) x = \log_6 1296$$

$$1296 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$$

$$x = \log_6 1296 = \log_6 6^4$$

بالتالي فإن قيمة  $x$  تساوي 4

$$9) x = \log_4 4096$$

$$4096 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6$$

$$x = \log_4 4096 = \log_4 4^6$$

بالتالي فإن قيمة  $x$  تساوي 6

$$10) x = \log_{10} 100000$$

$$243 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$$

$$x = \log_{10} 100000 = \log_{10} 10^5$$

بالتالي فإن قيمة  $x$  تساوي 5

## السؤال الخامس: اكتب القيم التالية بصيغة اقتران اسي

1)  $\log_2 32 = 5$

$$\log_2 32 = 5 \rightarrow \log_2 2^5 = 5 \rightarrow 2^5 = 32$$

2)  $\log_2 16 = 4$

$$\log_2 16 = 4 \rightarrow \log_2 2^4 = 4 \rightarrow 2^4 = 16$$

3)  $\log_3 81 = 4$

$$\log_3 81 = 4 \rightarrow \log_3 3^4 = 4 \rightarrow 3^4 = 81$$

4)  $\log_4 64 = 3$

$$\log_4 64 = 3 \rightarrow \log_4 4^3 = 3 \rightarrow 4^3 = 64$$

5)  $\log_5 125 = 3$

$$\log_5 125 = 3 \rightarrow \log_5 5^3 = 3 \rightarrow 5^3 = 125$$

6)  $\log_3 243 = 5$

$$\log_3 243 = 5 \rightarrow \log_3 3^5 = 5 \rightarrow 3^5 = 243$$

7)  $\log_6 1296 = 4$

$$\log_6 1296 = 4 \rightarrow \log_6 6^4 = 4 \rightarrow 6^4 = 1296$$

8)  $\log_7 117649 = 6$

$$\log_7 117649 = 6 \rightarrow \log_7 7^6 = 6 \rightarrow 7^6 = 117649$$

9)  $\log_2 279936 = 7$

$$\log_6 279936 = 6 \rightarrow \log_6 6^7 = 7 \rightarrow 6^7 = 279936$$

$$10) \log_9 6561 = 4$$

$$\log_9 6561 = 4 \rightarrow \log_9 9^4 = 4 \rightarrow 9^4 = 6561$$

السؤال السادس: اوجد قيمة  $x$  في المعادلات التالية

$$1) \ln x = 2$$

$$x = e^2$$

$$2) \ln x + \ln 2 = 3$$

$$\ln x + \ln 2 = \ln 2x = 3 \rightarrow 2x = e^3 \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{e^3}{2} \rightarrow x = \frac{e^3}{2}$$

$$x = \frac{e^3}{2}$$

$$3) \ln x - \ln 4 = 5$$

$$\ln x - \ln 4 = \ln \frac{x}{4} = 5 \rightarrow \frac{x}{4} = e^5 \rightarrow \frac{x}{4} = e^5 \rightarrow x = 4e^5$$

$$x = 4e^5$$

$$4) \ln x + \ln 2 + \ln \frac{1}{2} = 4$$

$$\ln x + \ln 2 + \ln \frac{1}{2} = \ln (2 \times x \times \frac{1}{2}) = 4 \rightarrow x = e^4$$

$$x = e^4$$

$$5) \ln x - \ln 3 - \ln 2 = 6$$

$$\ln x - \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{x}{3 \times 2} = 6 \rightarrow \frac{x}{6} = e^6 \rightarrow x = 6e^6$$

$$x = 6e^6$$



$$6) \ln x + \ln 5 - \ln 6 = 9$$

$$\ln x + \ln 5 - \ln 6 = \ln 5 \times x \times \frac{1}{6} = 9 \rightarrow \frac{5x}{6} = e^9 \rightarrow x = \frac{6}{5} e^9$$

$$x = \frac{6}{5} e^9$$

$$7) \ln x + \ln 5 - \ln \frac{1}{5} = 3$$

$$\ln x + \ln 5 - \ln \frac{1}{5} = \ln 5 \times x \times \frac{1}{\frac{1}{5}} = 9 \rightarrow 25x = e^9 \rightarrow x = \frac{1}{25} e^9$$

$$x = \frac{1}{25} e^9$$

$$8) \ln 7x^3 - \ln 6x^2 = 7$$

$$\ln 7x^3 - \ln 6x^2 = \ln \frac{7x^3}{6x^2} = 7 \rightarrow \ln \frac{7}{6} x = 7 \rightarrow x = \frac{6}{7} e^7$$

$$x = \frac{6}{7} e^7$$

$$9) \ln 3x^3 - \ln 4x^4 = 12$$

$$\ln 3x^3 - \ln 4x^4 = \ln \frac{3x^3}{4x^4} = 12 \rightarrow \ln \frac{3}{4x} = 12 \rightarrow \frac{3}{4x} = e^{12} \rightarrow x = \frac{3}{4e^{12}}$$

$$x = \frac{3}{4e^{12}}$$

$$10) \ln^2 \sqrt{x^3} = 12$$

مدخل إلى الرياضيات  $\longrightarrow$

$$\ln x^{\frac{3}{2}} = 12 \rightarrow \frac{3}{2} \ln x = 12 \rightarrow \ln x = \frac{2}{3} \times 12 \rightarrow \ln x = 8 \rightarrow x = e^8$$

$$x = e^8$$

السؤال السابع: اوجد قيمة  $x$  في المعادلات التالية:

1)  $e^{3x} = 2$

$$e^{3x} = 2 \rightarrow 3x = \ln 2 \rightarrow x = \frac{\ln 2}{3}$$

2)  $e^{3x+1} = 3 \ln 4$

$$e^{3x+1} = 3 \ln 4 \rightarrow 3x + 1 = \ln(3 \ln 4) \rightarrow 3x = \ln(3 \ln 4) - 1$$

$$x = \frac{\ln(3 \ln 4) - 1}{3}$$

$$x = \frac{\ln(3 \ln 4) - 1}{3}$$

3)  $e^{x^2-2x+1} = 1$

$$e^{x^2-2x+1} = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = \ln(1) \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1) = 0$$

4)  $e^{4x} = \sqrt{3}$

$$e^{4x} = \sqrt{3} \rightarrow 4x = \ln \sqrt{3} \rightarrow 4x = \frac{1}{2} \ln 3 \rightarrow x = \frac{\ln 3}{8}$$

$$x = \frac{\ln 3}{8}$$

$$5) e^{100x} = -1$$

$$e^{100x} = -1 \rightarrow 100x = \ln -1$$

لا يوجد حل للمعادلة حيث لا يوجد لوغاريتم للأعداد السالبة

السؤال التاسع: اكتب اللوغاريتمات التالية بأبسط صورة

$$1) \log \frac{ab}{c} : c > 0 \quad ab > 0$$

$$\log \frac{ab}{c} = \log ab - \log c = \log a + \log b - \log c$$

$$\log \frac{ab}{c} = \log a + \log b - \log c$$

$$2) \log \frac{ab^2}{c} : c > 0 \quad ab^2 > 0$$

$$\begin{aligned} \log \frac{ab^2}{c} &= \log ab^2 - \log c = \log a + \log b^2 - \log c \\ &= \log a + 2\log b - \log c \end{aligned}$$

$$\log \frac{ab^2}{c} = \log a + 2\log b - \log c$$

$$3) \log \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$$

$$\begin{aligned} \log \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}} &= \log \sqrt{a}\sqrt{b} - \log \sqrt{c} \\ &= \log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} - \log \sqrt{c} \\ &= \log a^{0.5} + \log b^{0.5} - \log c^{0.5} \\ &= 0.5\log a + 0.5\log b - 0.5\log c \end{aligned}$$

$$\log \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = 0.5(\log a + \log b - \log c)$$

4)  $\log \frac{ab+b}{c} : c > 0 \quad ab > 0$

$$\begin{aligned} \log \frac{ab+b}{c} &= \log \frac{(a+1)b}{c} = \log (a+1)b - \log c \\ &= \log (a+1) + \log b - \log c \end{aligned}$$

$$\log \frac{ab+b}{c} = \log (a+1) + \log b - \log c$$

5)  $\log \left(\frac{ab+b}{c}\right)^2 : c > 0 \quad ab > 0$

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{ab+b}{c}\right)^2 &= 2\log \frac{ab+b}{c} = 2\log \frac{(a+1)b}{c} \\ &= 2\log (a+1)b - 2\log c \\ &= 2\log (a+1) + 2\log b - 2\log c \end{aligned}$$

6)  $\log \frac{ab}{(dc)^2} : dc > 0 \quad ab > 0$

$$\begin{aligned} \log \frac{ab}{(dc)^2} &= \log ab - \log (dc)^2 = \log a + \log b - 2\log dc \\ &= \log a + \log b - 2\log d - 2\log c \end{aligned}$$

$$\log \frac{ab}{(dc)^2} = \log a + \log b - 2\log d - 2\log c$$



**Third Unit**  
**Polynomial Function**





## Third Unit

### Polynomial Function

(اقتران كثير الحدود)

- 1) Definition polynomial Function
- 2) Operations on Polynomials
- 3) The apportionment of the polynomial
- 4) The Remainder and Factor Theorem
- 5) Properties of Polynomials
- 6) Solving Algebraic Equation with One Variable



## 1) Polynomial Function

مدخل الي القتران كثير حدود

لتكن A,B مجموعتين جزئيتين من الاعداد الحقيقية (R) ولكن ماهي الاعداد الحقيقية في البداية ما هو تعريف مجموعات الاعداد

ولكن ما هي الاعداد الحقيقية وما هي مجموعة الاعداد الطبيعية والكسرية

(1) مجموعة الاعداد الطبيعية (The Natural Numbers)

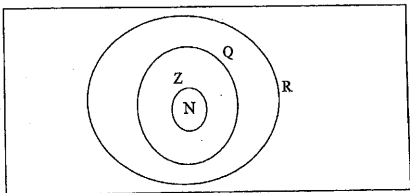
$$N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

(2) مجموعة الاعداد الصحيحة (The Integer Numbers)

$$Z = \{ \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

(3) مجموعة الاعداد النسبية (The Rational Numbers)

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$



مدخل إلى الرياضيات  $\longrightarrow$

من خلال هذه الشكل التوضيح والذي يوضح ان مجموعة الاعداد الطبيعية هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الصحيحة وكذلك مجموعة الاعداد الصحيحة مجموعة جزئية من الاعداد النسبية حيث ان كل عدد صحيح يمكن كتابته على شكل عدد نسبي

$$2 = 2 = \frac{2}{1} = \frac{-2}{-1}$$

ملاحظة: التمثيل العشري النسبي يوجد له شكلين اما منتهي او غير منتهي

0.5, .4 .75 ,.03333.....

(4) مجموعة الاعداد غير النسبية ويرمز لها بالرمز (I) وهي تحتوي على الاعداد غير الدورية وغير المنتهية على سبيل المثال

$$\pi, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}$$

(5) مجموعة الاعداد الحقيقية (R) وتمثل اتحاد بين مجموعة الاعداد النسبية ومجموعة الاعداد غير النسبية

بعد ان تم تعريف على مجموعات الاعداد نرجع للموضوع الاساسي

لتكن A, B مجموعتين جزئيتين من الاعداد الحقيقية (R) فان حاصل الضرب الديكارتي بين AB ويرمز له بالرمز  $A \times B$  ويعرف كالاتي

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

المسقط الأول      المسقط الثاني

اي مجموعة جزئية من  $A \times B$  تسمى علاقة

← مدخل إلى الرياضيات

مجموعة المساقط الأولى تسمى ب مجال (domain) العلاقة اما مجموعة المساقط الثانية تسمى ب المدى (range)

### مجال الاقتران (Domain)

هو جميع قيم  $x$  التي تكون عندها  $f$  موجوده

### مدى الاقتران (Range)

تسمى مجموعة الصور للقيم  $x$  تحت تاثير  $f$  بالمدى

مثال

$$1) R_1 = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 4) \}$$

علاقة ولكن ليست اقتران لاحظ عندما  $x=1$  يوجد لها صورتين 3 و 2 مما تناقض مع تعريف الاقتران والذي ينص عل ان كل عنصر بالمجال له صورة واحدة في المدى

$$2) R_2 = \{ (x, y) \in R^2 : y = x \}$$

اقتران لاحظ كل عنصر بالمجال له صورة واحدة في المدى لا يوجد قيمتين ل  $x$  لهما نفس الصورة

وللتأكد خذ اي قيمة ل  $x$  وجد صورتها في المعادلة وستجد ان له صورة واحدة فقط

$$f(x) = 3x^2 - 5$$

أوجد:

1)  $f(0)$

2)  $f(-2)$

3)  $f(\sqrt{7})$

4)  $f(\sqrt[3]{3})$

1)  $f(0) = 3(0)^2 - 5 = -5 = -5$

2)  $f(-2) = 3(-2)^2 - 5 = 3(4) - 5 = 12 - 5 = 7$

3)  $f(\sqrt{7}) = 3(\sqrt{7})^2 - 5 = 3(7) - 5 = 21 - 5 = 16$

$$4) f(\sqrt[3]{3}) = 3(\sqrt[3]{3})^2 - 5 = 3(3)^{\frac{2}{3}} - 5 = 3 \times 3(3)^{\frac{1}{3}} - 5 = 9(3)^{\frac{1}{3}} - 5$$

مثال

إذا كان

$$h(x) = \frac{1}{x^3 + 12}$$

$$h(\sqrt[3]{15}), h(\sqrt[3]{12}), h(3), h(\sqrt[3]{3}) \text{ أوجد}$$

$$h(\sqrt[3]{15}) = \frac{1}{(\sqrt[3]{15})^3 + 12} = \frac{1}{(15)^{\frac{3}{3}} + 12} = \frac{1}{15 + 12} = \frac{1}{27}$$

$$h(\sqrt[3]{12}) = \frac{1}{(\sqrt[3]{12})^3 + 12} = \frac{1}{(12)^{\frac{3}{3}} + 12} = \frac{1}{12 + 12} = \frac{1}{24}$$

$$h(3) = \frac{1}{(3)^3+12} = \frac{1}{(3*3*3)+12} = \frac{1}{27+12} = \frac{1}{39}$$

$$h(\sqrt[2]{3}) = \frac{1}{(\sqrt[2]{3})^3+12} = \frac{1}{(3)^{\frac{3}{2}}+12} = \frac{1}{3\sqrt[2]{3}+12}$$

## 2) Definition polynomial Function

(تعريف اقتران كثير الحدود)

ليكن

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Where

$$n \in \mathbb{N}$$

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

بتالي فان  $p$  يسمى اقتران كثير حدود من الدرجة  $n$

مثال:

$$1) f(x) = 5$$

كثير حدود من الدرجة الصفرية ويسمى هذا الاقتران بالاقتران الثابت

$$2) f(x) = 7x - 2$$

كثير حدود من الدرجة الاولى ويسمى ايضا بالاقتران الخطي

$$3) f(x) = 3x^2 + 9$$

مدخل إلى الرياضيات  $\longrightarrow$

كثير حدود من الدرجة الثانية ويسمى بالاقتران التربيعي

$$4) f(x) = x^2 + 6$$

ليس كثير حدود لاحظ الاس لا ينتمي للاعداد الطبيعية

ملاحظة

إذا كان  $f(x)$  كثير حدود بتالي فإن مجاله الأعداد الحقيقية  $R$

مثال

أوجد مجال ومدى الاقترانات التالية:

$$1) f(x) = x + 1$$

تلاحظ ان  $f$  معرف عند كل القيم بالتالي المجال هو

$R$

لايجاد المدى

$$y = x + 1 \rightarrow y - 1 = x$$

بالتالي فإن المدى هو

$R$

$$2) f(x) = \frac{1}{x}$$

تلاحظ ان  $f$  معرف عند كل القيم بالتالي المجال هو

$R - \{0\}$

لايجاد المدى

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{y}$$

بالتالي فان المدى هو

$$R - \{0\}$$

$$3) t(x) = \frac{1}{x-1}$$

لاحظ ان t معرف عند كل القيم بالتالي المجال هو

$$R - \{1\}$$

لايجاد المدى

$$y = \frac{1}{x-1} \rightarrow x = \frac{1}{y} + 1$$

بالتالي فان المدى هو

$$R - \{0\}$$

$$4) z(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

لاحظ ان z معرف عند كل القيم المجال ما عدا اصفار المقام ولايجادها

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x=1, -1$$

هو

$$R - \{-1, 1\}$$

لايجاد المدى

بالتالي فإن المدى هو

$$R - \{0\}$$

$$5) k(x) = 2 + \sqrt{x-1}$$

مجال الاقتران هو كل الاعداد الحقيقية باستثناء الاعداد التي تجعل من

المقدار  $(x-1)$  سالبا وهي كل الاعداد التي تقع ضمن الفترة  $(-\infty, 1)$

لايجاد المدى

لايجاد المدى لاحظ ان قيمة  $\sqrt{x-1}$  تتغير على الفترة  $(0, \infty)$  بتالي فان

$k(x)$  تتغير على الفترة  $[2, \infty)$

$$6) h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

مجال الاقتران هو كل الاعداد الحقيقية باستثناء الاعداد التي تجعل من

المقدار  $(x^2 - 4)$  سالبا وهي كل الاعداد التي تقع ضمن الفترة

$$(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

موضحا كالآتي:

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \mp 2$$





أما المدى

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

لاحظ عندما تقع  $x$  ضمن الفترة  $[2, \infty)$  فإن  $y$  تقع في هذه الحالة ضمن

نفس الشيء بالنسبة للفترة الثانية لـ  $x$

بتالي فإن المدى هو

$$[0, \infty)$$

بشكل عام لايجاد مجال الاقتران الجذري  $f(x) = \sqrt{g(x)}$  يجب حل المتباينة التالية:

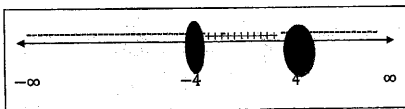
$$g(x) \geq 0$$

$$7) h(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

مجال الاقتران هو كل الاعداد الحقيقية باستثناء الاعداد التي تجعل من المقدار  $(x^2 - 4)$  سالبا وهي كل الاعداد التي تقع ضمن الفترة بمعنى ان

$$g(x) = 16 - x^2 \geq 0$$

$$16 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \mp 4$$



$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

لاحظ عندما تقع  $x$  ضمن الفترة  $[-4, 4]$  فان  $y$  تقع في هذه الحالة ضمن  $[0, \infty)$

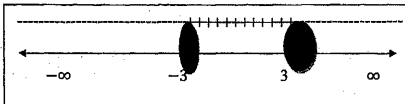
بتالي فان المدى هو  $[0, \infty)$

$$8) f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

مجال الاقتران هو كل الاعداد الحقيقية باستثناء الاعداد التي تجعل من المقدار  $(x^2 - 9)$  سالبا وهي كل الاعداد التي تقع ضمن الفترة بمعنى ان

$$g(x) = x^2 - 9 \geq 0$$

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \mp 3$$



$$[-3, 3]$$

$$y = \sqrt{x^2 - 9}$$

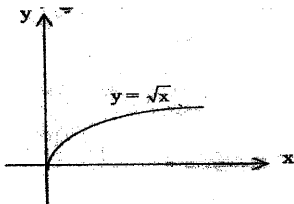
لاحظ عندما تقع  $x$  ضمن الفترة  $[-3, 3]$  فان  $y$  تقع في هذه الحالة ضمن

$$[0, \infty)$$

$$[0, \infty)$$

سؤال لماذا دائما مدى الاقتران الجذري هو  $[0, \infty)$  لتلاجابة عن هذا السؤال

انظر الى شكل الاقتران الجذري في المستوى الديكارتي:



### (3) العمليات على الاقترانات (Operations on Polynomials)

$$1) (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$2) (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$3) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ with conditional } g(x) \neq 0$$

ملاحظات:

(1) مجال  $(f \pm g)(x)$  هو عبارة عن مجال  $f$  تقاطع مجال  $g$

(2) مجال  $(f \cdot g)(x)$  هو عبارة عن مجال  $f$  تقاطع مجال  $g$

(3) مجال  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  هو عبارة عن مجال  $f$  تقاطع مجال  $g$  بالكامل

باستثناء اصفار  $g$  وتكتب رياضياً بالصيغة التالية:

$$\text{domain } f \cap \text{domain } g - \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$$

مثال

إذا كان

$$f(x) = 3 + x$$

$$g(x) = x - 3$$

أوجد

$$1) (f + g)(x)$$

$$2) (f - g)(x)$$

$$3) (f \cdot g)(x)$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

$$5) (2f + 3g)(x)$$

$$1) (f + g)(x) = 3 + x + x - 3 = 2x$$

$$2) (f - g)(x) = 3 + x - x + 3 = 6$$

$$3) (f \cdot g)(x) = (3 + x)(x - 3) = x^2 - 9$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3+x}{x-3} \quad x \neq 3$$

$$5) (2f + 3g)(x) = 2(3 + x) + 3(x - 3) = 6 + 2x + 3x - 9$$

$$= 5x - 3$$

مثال

إذا كان

$$t(x) = x^2 - 5$$

$$g(x) = x^3 - 1$$

أوجد

$$1) (t + g)(x)$$

$$2) (t - g)(x)$$

$$3) (t \cdot g)(x)$$

$$4) \left(\frac{t}{g}\right)(x)$$

$$5) (4t + 6g)(x)$$

$$1) (t + g)(x) = x^2 - 5 + x^3 - 1 = x^3 + x^2 - 6$$

$$2) (t - g)(x) = x^2 - 5 - x^3 + 1 = -x^3 + x^2 - 4$$

$$3) (t \cdot g)(x) = (x^2 - 5)(x^3 - 1) = x^5 - x^2 - 5x^3 + 5$$

$$4) \left(\frac{t}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 5}{x^3 - 1} \quad x \neq 1$$

$$5) (4t + 6g)(x) = 4(x^2 - 5) + 6(x^3 - 1) = 4x^2 - 20 + 6x^3 - 6$$

$$= 6x^3 + 4x^2 - 26$$

إذا كان

$$l(x) = x^3 + 1$$

$$r(x) = x^3 + x^2 + 1$$

أوجد

$$1) (l+r)(x)$$

$$2) (l-r)(x)$$

$$3) (l.r)(x)$$

$$4) \left(\frac{l}{r}\right)(x)$$

$$5) (3l+4r)(x)$$

$$1) (l+r)(x) = x^3 + 1 + x^3 + x^2 + 1 = 2x^3 + x^2 + 2$$

$$2) (l-r)(x) = x^3 + 1 - x^3 - x^2 - 1 = -x^2$$

$$3) (l.r)(x) = (x^3 + 1)(x^3 + x^2 + 1)$$

$$= x^6 - x^5 + x^3 + x^3 + x^2 + 1$$

$$= x^6 - x^5 + x^3 + x^3 + x^2 + 1$$

$$4) \left(\frac{l}{r}\right)(x) = \frac{x^3+1}{x^3+x^2+1} \quad x \neq 3$$

$$5)(3l + 4r)(x) = 3(x^3 + 1) + 4(x^3 + x^2 + 1) = 3x^3 +$$

$$3 + 4x^3 + 4x^2 + 4$$

$$= 7x^3 + 4x^2 + 7$$

تركيب الاقترانات

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

وتقرأ f بعد g

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

وتقرأ g بعد f

مثال

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = x - 2$$

اوجد كل من

$$(f \circ g)(x)$$

$$(g \circ f)(x).$$

واوجد المجال لكل منهما

$$1) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = \sqrt{x - 2}$$

مدخل إلى الرياضيات →

بما أن  $f$  اقتران جذري بتالي فإن مجال الاقتران قيم  $x$  التي هي اكبر من صفر ( $x \geq 0$ ) مجال  $(f \circ g)$  هو  $x - 2 \geq 0$  بتالي مجاله  $x \geq 2$

$$2)(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 2$$

بتالي مجال  $(g \circ f)$  هو  $x \geq 0$  ويمكن التعبير عنها ايضا بهذه الصيغة

$$\{IR: x \geq 0\}$$

#### 4)The apportionment of the polynomial

(قسمة كثيرات الحدود)

إذا كان  $f(x)$  and  $h(x)$  اقترانين كثيري حدود بحيث  $h(x) \neq 0$  فإن

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$$

There are 2 unique function like  $k$  &  $r$  such that

كما يوجد اقترانين كثيري حدود وحيدان مثل  $K, R$  بحيث

$$f(x) = h(x) \cdot k(x) + r(x) \text{ where degree of } h(x) > \text{degree of } r(x) > 0$$

يسمى  $k(x)$  باقي القسمة و  $r(x)$  نتائج القسمة

ويوجد طريقتين لإجراء القسمة :

1- القسمة التركيبية



مثال

جد ناتج وباقي قسمة  $f(x) = x^3 - 2x + 1$  على  $h(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x + 2 \\
 \hline
 x^3 - 2x + 1 \quad | \quad x - 2 \\
 \hline
 - \\
 x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 2x^2 - 2x + 1 \\
 \hline
 - \\
 2x^2 - 4x \\
 \hline
 2x + 1 \\
 \hline
 - \\
 2x - 4 \\
 \hline
 5
 \end{array}$$

تلخيص الخطوات

(1) رتب حدود المقسوم والمقسوم عليه تنازليا

(2) قسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه

(3) ضرب المقسوم عليه بما حصلنا عليه في 2 وطرحنا الناتج

(4) كرر الخطواتين 2 و 3 حتى وصلنا لباقي درجته اقل من درجة المقسوم عليه

بالتالي فان ناتج

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 2} = x^2 - 2x + 1 + \frac{5}{x - 2}$$

لاحظ الاس الذي نتج معنا عن القسمة ال يمثل  $x^2 = \frac{x^3}{x}$  ماذا يعني ذلك؟

يعني اننا اذا اردنا معرفة درجة كثير الحدود الذي ينتج عن القسمة فاننا نأخذ

اكبر اس في المقسوم

اكبر اس في المقسوم عليه

ملاحظة: من المهم جدا ترتيب الحدود من الاكبر الى الاصغر عند اجراء

القسمة

مثال

جد ناتج وباقي قسمة  $f(x) = x^7 + 1$  على  $h(x) = x^3 + 1$ 

$$x^4 - x$$

$$\begin{array}{r} x^7 + 1 \quad x^3 + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$x^7 + x^4$$

$$x^4 + 1$$

$$x^4 + 1$$

$$0$$

تلخيص الخطوات

- (1) رتب حدود المقسوم والمقسوم عليه تنازليا
- (2) قسمة الحد الاول في المقسوم على الحد الاول في المقسوم عليه
- (3) ضرب المقسوم عليه بما حصلنا عليه في 2 وطرحنا الناتج
- (4) كرر الخطواتين 2 و3 حتى وصلنا لباقي درجته اقل من درجة المقسوم عليه

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^7+1}{x^3+1} = x^4 - x$$

مثال

جد ناتج وباقي قسمة  $f(x) = x^6 + 5x^4 + x + 5$  على  $h(x) = x^4 + 1$

$$\begin{array}{r} x^2 + 5 \\ \hline x^6 + 5x^4 + x + 5 \quad x^4 + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$x^6 + x^2$$

$$\hline 5x^4 + x^2 + 4x + 5$$

$$- \quad 5x^4 + 5$$

$$\hline x^2 + 4x$$

تدريب:

جد ناتج وباقي قسمة  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$  على  $h(x) = x - 2$

الجواب

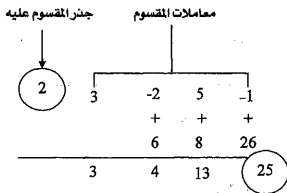
$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{x-2} = 3x^2 + 4x + 13 + \frac{25}{x-2}$$

القسمة التركيبية

مثال

جد ناتج وباقي قسمة  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$  على  $h(x) = x - 2$

نعيد كتابة  $x - 2$  ليصبح  $x = 2$



$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{x-2} = 3x^2 + 4x + 13 + \frac{25}{x-2}$$

## تلخيص للخطوات

- 1) رتب حدود المقسوم والمقسوم عليه تنازليا
- 2) اعد كتابة المقسوم عليه ليصبح  $x=2$
- 3) ضع معامل الحد الاول واضرب بالعدد 2 ككتبنا الناتج تحت المعامل الثاني ثم جمعنا
- 4) كرر عملية الضرب والجمع الى اخر معامل فتكون الاعداد الثلاثة هي معاملات حدود ناتج القسمة واخر عدد هو الباقي

## مثال

جد ناتج وباقي قسمة  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2x + 3$  على  $h(x) = x - 3$

نعيد كتابة  $x - 2$  ليصبح  $x=2$

جذر المقسوم عليه	معاملات المقسوم	
↓		
3	1	0
	-10	2
	3	-3
	+ 3	+ 9
	+ -3	+ -3
	+ 3	-3
	1	3
	-1	-1
	-1	-1
	0	0

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^4 - 10x^2 + 2x + 3}{x - 3} = x^3 + 3x^2 - x - 1$$

تلخيص للخطوات

- (1) رتب حدود المقسوم والمقسوم عليه تنازليا
- (2) اعد كتابة المقسوم عليه ليصبح  $x=a$
- (3) ضع معامل الحد الاول وضربناه بالعدد 2 كتبنا الناتج تحت المعامل الثاني ثم جمعنا
- (4) كرر عملية الضرب والجمع الى اخر معامل فتكون الاعداد الثلاثة هي معاملات حدود ناتج القسمة واخر عدد هو الباقي ولاحظ ان الباقي يساوي صفر

تدريب

جد ناتج وباقي قسمة  $f(x) = x^3 - 2x + 1$  على  $h(x) = x - 2$  باستخدام القسمة التركيبية

الجواب

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{x - 2} = 3x^2 + 4x + 13 + \frac{25}{x - 2}$$

**The Remainder and Factor Theorem (نظرية العوامل)**

$f(a) = 0$  عامل من عوامل كثير الحدود اذا فقط اذا كان

مثال

اذا كان

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$$

$$h(x) = x - 3$$

بين ان  $h(x)$  عامل من عوامل  $f(x)$

العدد 3 هو صفر الاقتران  $h(x)$  بتالي نعوض قيمته في  $f$

$$f(x) = (3)^3 - 3(3)^2 + 3 - 3 = 0$$

حسب نظرية العوامل فان  $h(x)$  عامل من عوامل  $f(x)$

مثال

اذا كان

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$h(x) = x - 1$$

بين ان  $h(x)$  عامل من عوامل  $f(x)$

العدد 1 هو صفر الاقتران  $h(x)$  بتالي نعوض قيمته في  $f$

$$f(x) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$

حسب نظرية العوامل فان  $h(x)$  عامل من عوامل  $f(x)$

مثال

حلل المقدار

$$f(x) = x^3 - 1$$

الى عوامله الاولى

$$f(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$



← مدخل إلى الرياضيات

تسمى هذه الطريقة بالتحليل بفرق المكعبين ولكن ماهي طريقة الفرق بين  
مكعبين

نعود للمثال

إذا لدينا عامل واحد هو

$$h(x) = x - 1$$

مثال

حلل المقدار

$$f(x) = x^3 - 8$$

إلى عوامله الأولية

$$f(x) = x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

إذا يوجد عامل واحد هو

$$h(x) = x - 2$$

لماذا عامل واحد فقط لاحظ المقدار

$$x^2 + 2x + 4$$

بحساب المميز

$$a=1$$

$$b=2$$

$$c=4$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12$$

بالتالي المميز سالب وهذا يعني ان المقدار لا يوجد له اصفار (عوامل) وسيتم الحديث عن المميز وقواعده لاحقا بالتفصيل

## مثال

حلل المقدار

$$f(x) = x^3 + 27$$

الى عوامله الاولى

$$f(x) = x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 + 3x + 9)$$

اذا لدينا عامل واحد هو

$$h(x) = x - 3$$

نفس السؤال السابق لماذا عامل واحد فقط لاحظ المقدار

$$x^2 + 3x + 9$$

بحساب المميز

$$a=1$$

$$b=3$$

$$c=9$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(9) = 9 - 36 = -27$$

بالتالي المميز سالب وهذا يعني ان المقدار لا يوجد له اصفار (عوامل)

ملاحظه العوامل الاولى لاقتربات كثيرات الحدود اما ان تكون خطية او

تربيعية مميزها سالب ولكن ما هو المميز

بداية المعادلة التربيعية تكون بالصيغة التالية

$$ax^2 + bx + c$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac$$

وله ثلاث حالات

اما اكبر من صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا صفرين حقيقيين

يساوي صفر بمعنى ان لدينا صفر واحد

اصغر من صفر (سالبي) لا يوجد اصفار

وسنأخذ 3 امثلة توضح ذلك

القاعدة العامة لحل اي معادله تربيعية

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\text{المميز}}}{2a}$$

مثال

اوجد اصفار الاقتران  $f(x)$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$a=1$$

$$b=-3$$

$$c=2$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$$

المميز اكبر من صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا صفرين حقيقيين

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{or} \quad x = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

بالتالي

$$x=2 \text{ or } x=1$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

للتأكد من صحة الحل

$$(x - 2)(x - 1) = x^2 - x - 2x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

مثال

اوجد اصفار الاقتران  $f(x)$

$$f(x) = x^2 + 4x + 4$$

$$a=1$$

$$b=3$$

$$c=2$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$$

المميز يساوي صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا صفر حقيقي واحد فقط

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 0}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x = -2$$

بالتالي

$$x = -2$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2)$$

للتأكد من صحة الحل

$$(x + 2)(x + 2) = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$$

مثال

اوجد اصفار الاقتران  $f(x)$

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$a=1$$

$$b=-3$$

$$c=5$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

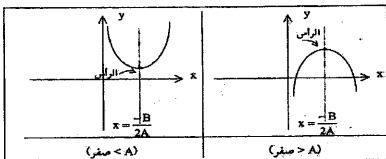
المميز اصغر من صفر (سالب) وفي هذه الحالة ليس لدينا اصفار

بمعنى ان المعادله غير قابلة للتحويل

## Properties of Polynomials (خواص كثيرات الحدود)

الصورة العامة للاقتران التربيعي:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



محور التماثل للقطع المكافئ يعطى بالعلاقة التالية

$$x = -\frac{B}{2A}$$

وتسمى النقطة التي يتقاطع فيها محور التماثل للقطع المكافئ مع منحنى

القطع بالراس وتعطى إحداثياتها بالعلاقة التالية

$$\left(-\frac{B}{2A}, f\left(-\frac{B}{2A}\right)\right)$$

يكون رأس القطع المكافئ مفتوح للأعلى إذا كانت  $A > 0$  ويكون للمنحنى

$$f\left(-\frac{B}{2A}\right) \text{ قيمة صغرى هي}$$

يكون رأس القطع المكافئ مفتوح للأسفل إذا كانت  $A < 0$  ويكون للمنحنى

$$f\left(-\frac{B}{2A}\right) \text{ قيمة عظمى هي}$$

$$1) y = -x^2 + 4x - 5$$

$$A = -1$$

$$B = 4$$

$$C = -5$$

معادلة محور التماثل:

$$x = -\frac{B}{2A} = -\frac{4}{(2)(-1)} = -(-2) = 2$$

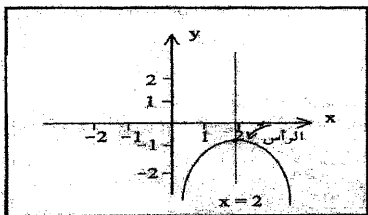
$$f\left(-\frac{B}{2A}\right) = f(2) = -(2^2) + 4(2) - 7 = -4 + 8 - 7 = -1$$

إحداثيات الرأس

(2, -1)

$$A = -1 < 0$$

بناتي القطع مفتوح للأسفل



$$2) y = x^2 + 2$$

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$C = 2$$

معادلة محور التماثل:

$$x = -\frac{B}{2A} = -\frac{0}{2(1)} = 0$$

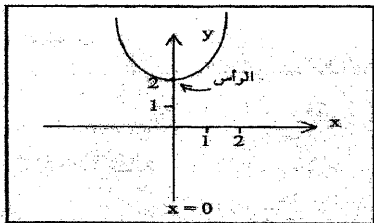
$$f(0) = 0 + 2 = 2$$

احداثيات الرأس

(0,2)

$$A=1 > 0$$

بتالي القطع مفتوح للأعلى



$$1) y = x^2 - 2x - 1$$

$$A = 1$$

$$B = -2$$

$$C = -1$$



معادلة محور التماثل:

$$x = -\frac{B}{2A} = -\frac{-2}{2(1)} = 1$$

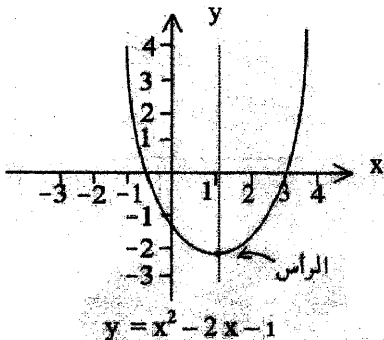
$$f(1) = 1 - 2 - 1 = -2$$

إحداثيات الرأس

(1, -2)

$$A=1 > 0$$

يتالي القطع مفتوح للأعلى



## - Solving Algebraic Equation with One Variable

حل المعادلات الجبرية بمتغير واحد

المعادلات ذات المتغير الواحد عبارة عن ثلاث أنواع

1) المعادلة الخطية وتكون على صورة

$$ax + b = 0$$

ويكون حل المعادلة

$$ax + b = 0 \rightarrow ax = -b \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

مثال

اوجد حل المعادلة

$$4x + 5 = 0$$

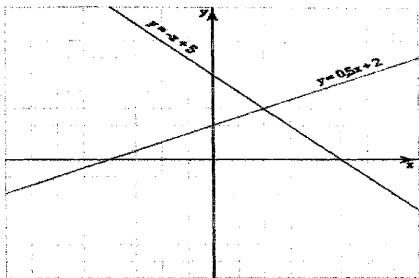
$$4x = -5 \rightarrow x = -\frac{5}{4}$$

ولتوضيح شكل الاقتران الخطي في المستوى الديكارتي

ارسم الاقتران التالي

$$1) y = -x + 5$$

$$2) y = \frac{1}{2}x + 2$$



لاحظ شكل الاقتران عبارة عن خط مستقيم ومن هذا الشكل جاء مسمى اقتران خطي

(2) المعادلة التربيعية وتكون على صورة

$$ax^2 + bx + c$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac$$

ولها ثلاث حالات كما ذكر سابقا وهي:

(1) اما اكبر من صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادلة

(2) يساوي صفر بمعنى ان لدينا حل واحد فقط

(3) اصغر من صفر (سالب) لا يوجد حل للمعادلة

مدخل إلى الرياضيات →

وسيوضح ذلك من خلال امثلة بالاضافة الى الامثلة الثلاث التي تم ذكرها سابقا لتوضيح مفهوم المميز وتحليل العبارة التربيعية ولتوضيح كيف ان تحليل الاقتران التكعيبي ينتج عنه مقدارين الاول من الدرجة الخطية والثانية عبارة تربيعية غير قابلة للتحليل وتم اثبات ذلك بالاعتماد على القانون العام لتحليل العبارة التربيعية (اسلوب المميز)

لتذكير فقط القاعدة العامة لحل اي معادلة تربيعية

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\text{المميز}}}{2a}$$

مثال

اوجد حل المعادلة

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$a=1$$

$$b=-4$$

$$c=3$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

المميز اكبر من صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادلة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4 \pm 2}{2(1)} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{or} \quad x = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

بالتالي

$$x=3 \text{ or } x=1$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

للتأكد من صحة الحل

$$(x - 3)(x - 1) = x^2 - x - 3x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

مثال

اوجد حل المعادله

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$a=1$$

$$b=-5$$

$$c=4$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(4)(1) = 25 - 16 = 9$$

المميز اكبر من صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادله

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{5 \pm 3}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{or} \quad x = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

بالتالي

$$x=1 \text{ or } x=4$$

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$$

للتأكد من صحة الحل

$$(x - 4)(x - 1) = x^2 - x - 4x + 4 = x^2 - 5x + 4$$

اوجد حل المعادله

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$a=1$$

$$b=-3$$

$$c=2$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

المميز يساوي صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حل واحد فقط

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 0}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x = -1$$

بالتالي

$$x=-1$$

للتأكد من صحة الحل

$$(x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

مثال

اوجد حل المعادله

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$a=1$$

$$b=-6$$

$$c=9$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

المميز يساوي صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حل واحد فقط

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{6 \pm 0}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = 3$$

بالتالي

$$x=3$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$$

للتأكد من صحة الحل

$$(x - 3)(x - 3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$$

مثال

اوجد حل المعادلة

$$x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$a=1$$

$$b=-4$$

$$c=7$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(7) = 16 - 28 = -12$$

المميز اصغر من صفر (سالبة) بمعنى ان لا يوجد حل للمعادلة

اوجد حل المعادلة

$$-2x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$a=1$$

$$b=6$$

$$c=-9$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-2)(-9) = 36 - 72 = -36$$

المميز اصغر من صفر (سالب) بمعنى أنه لا يوجد حل للمعادلة

(3) المعادلة من الدرجة الثالثة فما فوق وتكون على صورة

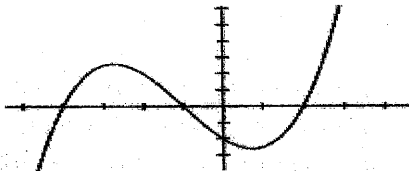
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

يستخدم ما يسمى بالتحليل إلى العوامل وسيوضح من خلال بالأمثلة

ملاحظة شكل الاقتران التكعيبي

تذكير المعادلة التكعيبية تكون على الشكل التالي:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$



مخطط الدالة التكعيبية جنود الدالة هي عند تقاطع المخطط مع محور x



مثال

اوجد حل المعادلة

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

الخطوة الاولى:

خذ الحد الثابت وحلل ذلك الحد الى عوامله الاولى

6

1,-1

2,-2

3,-3

6,-6

كل هذه الارقام هي اصفار متوقعة ولكن لمعرفة اي منها يجعل المعادلة تساوي

صفر نقوم بالتعويض كالتالي

$$1) 1^3 + 6(1)^2 + 11(1) + 6 = 24$$

$$2) -1^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = \boxed{0}$$

$$3) 2^3 + 6(2)^2 + 11(2) + 6 = 8 + 24 + 22 + 6 = 60$$

$$4) -2^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = -8 + 24 - 22 + 6 = \boxed{0}$$

$$5) 3^3 + 6(3)^2 + 11(3) + 6 = 27 + 54 + 33 + 6 = 120$$

$$6) -3^3 + 6(-3)^2 + 11(-3) + 6 = -27 + 54 - 33 + 6 = \boxed{0}$$

دقق النظر يوجد ثلاثة اصفار للمعادلة يجوز اخذ اي واحد منها واجراء

مدخل إلى الرياضيات  $\longrightarrow$

القسمة التركيبية أو الطويلة بمعنى يجوز التوقف عن التعميض عند إيجاد أي واحد منها ولن تختلف الإجابة وسنوضح ذلك من خلال حل السؤال بالقسمة الطويلة بالاعتماد على  $x = -2$  بالقسمة الطويلة وسيتم اعاده الحل عندما  $x = -3$  وسيتم الحصول على نفس الإجابة

$$x = -2$$

هو صفر من اصفار المعادله نقوم بتحويله الى عامل

$$x + 2$$

ونجري اما القسمة الطويلة او التركيبية

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x + 3 \\ \hline x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \quad \boxed{x + 2} \\ \hline - \\ x^3 + 2x^2 \\ \hline 4x^2 + 11x + 6 \\ \hline - \\ 4x^2 + 4x \\ \hline 8x + 6 \\ \hline - \\ 8x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

0

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 2)(x^2 + 4x + 3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

نجد المميز للمعادلة التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

$$a=1$$

$$b=4$$

$$c=3$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

المميز اكبر من صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادلة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(4) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{OR} \quad x = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

بالتالي

$$x=-3 \text{ or } x=-1$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 2)(x^2 + 4x + 3) = (x + 2)(x + 3)(x + 1)$$

$x = -3$

جذر المقسوم عليه

معاملات المقسوم

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} \text{↓} \\ \text{○} \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} | \\ \hline 1 \quad 6 \quad 11 \quad 6 \\ + \quad + \quad + \\ -3 \quad -9 \quad -6 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 2 \quad \text{○} \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 3)(x^2 + 3x + 2)$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

نجد المميز للمعادلة التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

$a=1$

$b=3$

$c=2$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$$

المميز اكبر من صفر(موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادلة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(3) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{OR} \quad x = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

بالتالي

$$x = -2 \text{ or } x = -1$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 2)(x + 1)$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 3)(x^2 + 3x + 2) = (x + 2)(x + 3)(x + 1)$$

ملاحظة يوجد عدد من الطرق الرياضية للتعامل مع حل المعادلات بمتغير واحد من الدرجة الثالثة فما فوق ذكرنا منها طريقة تحليل العوامل ولكن هناك بعض وأقول البعض وليس الكل المعادلات يمكن حلها بإخراج العامل المشترك لناخذ هذا المثال

مثال

أوجد حل المعادلة التالية

$$3x^4 - 48x^2 = 0$$

$$3x^4 + 28x^2 = 3x^2(x^2 - 16) = 0$$

$$3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 16 = 0$$

نجد المميز للمعادلة التربيعية التي نتجة

$$a=1$$

$$b=0$$

$$c= -16$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-16) = 0 + 64 = 64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(0) \pm \sqrt{64}}{2(1)} = \frac{\pm 8}{2(1)}$$

$$x = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{or} \quad x = \frac{-8}{2} = -4$$

↓

$(x-4)$

↓

$(x+4)$

$$3x^4 + 28x^2 = x^2(x-4)(x+4)$$

مثال

اوجد حل المعادلة

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9$$

الخطوة الاولى:

ناخذ الحد الثابت ونحلله الى عوامله الاولى

9

1,-1

3,-3

كل هذه الارقام هي اصفار متوقعة ولكن لمعرفة اي يمتها يجعل المعادلة

تساوي صفر نقوم بالتعويض كالتالي

$$1) 1^3 + 7(1)^2 + 15(1) + 9 = 32$$

$$2) -1^3 + 7(-1)^2 + 15(-1) + 9 = -1 + 7 - 15 + 9 = \boxed{0}$$

$$3) 3^3 + 7(3)^2 + 15(3) + 9 = 27 + 63 + 45 + 9 = 144$$

← مدخل إلى الرياضيات

$$4) -3^3 + 7(-3)^2 + 15(-3) + 9 = -27 + 63 - 45 + 9 = \boxed{0}$$

دقق النظر يوجد صفرين للمعادلة يجوز اخذ اي واحد منها واجراء القسمة التركيبية او الطويلة بمعنى يجوز ان نتوقف عن التمييز عند ايجاد اي واحد منها ولن تختلف الاجابة وسنوضح ذلك من خلال حل السؤال بالقسمة الطويلة بالاهتمام على  $x = -3$  بالقسمة الطويلة وسنعيد الحل عندما  $x = -1$  وسنجد بالنهاية نفس الاجابة

$$x = -3$$

هو صفر من اصفار المعادله حويله الى عامل

$$x + 3$$

ونجري اما القسمة الطويلة او التركيبية

$$x^2 + 4x + 3$$

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9$$

$$x + 3$$

$$x^3 + 3x^2$$

$$4x^2 + 15x + 9$$

$$4x^2 + 12x$$

$$3x + 9$$

$$3x + 9$$

$$0$$

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = (x + 3)(x^2 + 4x + 3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

نوجد المميز للمعادلة التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

$$a=1 \qquad b=4 \qquad c=3$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(4)(1) = 25 - 16 = 9$$

المميز اكبر من صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادلة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{5 \pm 3}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad \text{or} \qquad x = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

بالتالي

$$x=1 \text{ or } x=4$$

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$$

للتأكد من صحة الحل

$$(x - 4)(x - 1) = x^2 - x - 4x + 4 = x^2 - 5x + 4$$

مثال

اوجد حل المعادلة

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$a=1 \qquad b=-3 \qquad c=2$$



$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

المميز يساوي صفر (موجب) وفي هذه الحالة يوجد حل واحد فقط

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 0}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x = -1$$

بالتالي

$$x = -1$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$$

للتأكد من صحة الحل

$$(x + 1)(x + 1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

مثال

اوجد حل المعادله

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$a=1$$

$$b=-6$$

$$c=9$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

المميز يساوي صفر (موجب) وفي هذه الحالة يوجد حل واحد فقط

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{6 \pm 0}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = 3$$

بالتالي

$$x=3$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$$

للتأكد من صحة الحل

$$(x - 3)(x - 3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$$

مثال

اوجد حل المعادلة

$$x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$a=1$$

$$b=-4$$

$$c=7$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(7) = 16 - 28 = -12$$

المميز اصغر من صفر (سالب) بمعنى ان لا يوجد حل للمعادله

مثال

اوجد حل المعادلة

$$-2x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$a=-2$$

$$b=6$$

$$c=9$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-2)(9) = 36 - 72 = -36$$

المميز اصغر من صفر (سالب) بمعنى انه لا يوجد حل للمعادله

(3) المعادلة من الدرجة الثالثة فما فوق وتكون على صورة

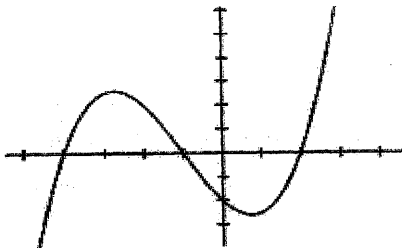
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

يستخدم ما يسمى بالتحليل إلى العوامل وسيوضح من خلال بالأمثلة

ملاحظة شكل الاقتران التكعيبي

تذكير المعادلة التكعيبية تكون على الشكل التالي:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$



مخطط الدالة التكعيبية جذور الدالة هي عند تقاطع المخطط مع محور  $x$

مثال

اوجد حل المعادلة

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

الخطوة الأولى: أخذ الحد الثابت وحل ذلك الحد إلى عوامله الأولية

6

1, -1

2, -2

3, -3

6, -6

كل هذه الأرقام هي اصفار متوقعة ولكن لمعرفة اي منها يجعل المعادلة

تساوي صفر نقوم بالتعويض كالتالي

$$1) 1^3 + 6(1)^2 + 11(1) + 6 = 24$$

$$2) -1^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = \boxed{0}$$

$$3) 2^3 + 6(2)^2 + 11(2) + 6 = 8 + 24 + 22 + 6 = 60$$

$$4) -2^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = -8 + 24 - 22 + 6 = \boxed{0}$$

$$5) 3^3 + 6(3)^2 + 11(3) + 6 = 27 + 54 + 33 + 6 = 120$$

$$6) -3^3 + 6(-3)^2 + 11(-3) + 6 = -27 + 54 - 33 + 6 = \boxed{0}$$

دقق النظر يوجد ثلاثة اصفار للمعادلة يجوز اخذ اي واحد منها واجراء

القسمة التركيبية او الطويلة بمعنى يجوز التوقف عن التعويض عند ايجاد اي

واحد منها ولن تختلف الاجابة وسنوضح ذلك من خلال حل السؤال بالقسمة

الطويلة بالاعتماد على  $x = -2$  بالقسمة الطويلة وسيتم اعاده الحل عندما  $x = -3$

وسيتم الحصول على نفس الاجابة

$$x = -2$$

هو صفر من اصفار المعادلة تقوم بتحويله الى عامل

$$x + 2$$

ونجري اما القسمة الطويلة او التركيبية

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x + 3 \\ \hline x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \end{array} \quad x + 2$$

-

$$\underline{x^3 + 2x^2}$$

$$4x^2 + 11x + 6$$

-

$$\underline{4x^2 + 4x}$$

$$\underline{8x + 6}$$

-

$$\underline{8x + 6}$$

$$0$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 2)(x^2 + 4x + 3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

نجد المميز للمعادلة التربيعية التي نتجت بعد اجراء القسمة

$$a=1$$

$$b=4$$

$$c=3$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

المميز اكبر من صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادلة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(4) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{or} \quad x = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

بالتالي

$$x = -3 \text{ or } x = -1$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 2)(x^2 + 4x + 3) = (x + 2)(x + 3)(x + 1)$$

طريقة اخرى

$$x = -3$$

جذر المقسوم عليه ↓ (3-)	معاملات المقسوم ┌───┬───┬───┬───┐ 1    6    11   6 +    +    +    + -3   -9   -6 ───┬───┬───┬───┐ 1    3    2    (0)
-------------------------------	--

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 3)(x^2 + 3x + 2)$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

نجد المميز للمعادلة التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

$$a=1$$

$$b=3$$

$$c=2$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$$

المميز اكبر من صفر(موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادلة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(3) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{-3 \pm 1}{2(1)} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{or} \quad x = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

بالتالي

$$x=-2 \text{ or } x=-1$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 2)(x + 1)$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 3)(x^2 + 3x + 2) = (x + 2)(x + 3)(x + 1)$$

ملاحظة يوجد عدد من الطرق الرياضية للتعامل مع حل المعادلات بمتغير

واحد من الدرجة الثالثة فما فوق ذكرنا منها طريقة تحليل العوامل ولكن هناك

بعض واقول البعض وليس الكل المعادلات يمكن حلها باخراج العامل المشترك لناخذ

هذا المثال

أوجد حل المعادلة التالية

$$3x^4 - 48x^2 = 0$$

$$3x^4 + 28x^2 = 3x^2(x^2 - 16) = 0$$

$$3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 16 = 0$$

نجد المميز للمعادلة التربيعية التي نتجت

$$a=1$$

$$b=0$$

$$c = -16$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-16) = 0 + 64 = 64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(0) \pm \sqrt{64}}{2(1)} = \frac{\pm 8}{2(1)}$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

or

$$x = \frac{-8}{2} = -4$$



$$(x-4)$$



$$(x+4)$$

$$3x^4 + 28x^2 = x^2(x-4)(x+4)$$



مثال: أوجد حل المعادلة

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = 0$$

الخطوة الأولى:

نأخذ الحد الثابت ونحلله إلى عوامله الأولية

9

1, -1

3, -3

كل هذه الأرقام هي أصفار متوقعة ولكن لمعرفة أي منها يجعل المعادلة تساوي صفر نقوم بالتعويض كالتالي

$$1) 1^3 + 7(1)^2 + 15(1) + 9 = 32$$

$$2) -1^3 + 7(-1)^2 + 15(-1) + 9 = -1 + 7 - 15 + 9 = \boxed{0}$$

$$3) 3^3 + 7(3)^2 + 15(3) + 9 = 27 + 63 + 45 + 9 = 144$$

$$4) -3^3 + 7(-3)^2 + 15(-3) + 9 = -27 + 63 - 45 + 9 = \boxed{0}$$

دقق النظر يوجد صفرين للمعادلة يجوز أخذ أي واحد منها وأجراء القسمة التركيبية أو الطويلة بمعنى يجوز أن نتوقف عن التعويض عند إيجاد أي واحد منها ولن تختلف الإجابة وستوضح ذلك من خلال حل السؤال بالقسمة الطويلة بالاعتماد على  $x = -3$  بالقسمة الطويلة وسنعيد الحل عندما  $x = -1$  وسنجد بالنهاية نفس الإجابة

$$x = -3$$

هو صفر من اصفار المعادلة حويله الى عامل

$$x + 3$$

ونجري اما القسمة الطويلة او التركيبية

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x + 3 \\ \hline x^3 + 7x^2 + 15x + 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$4x^2 + 15x + 9$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 12x \\ \hline \end{array}$$

$$3x + 9$$

$$\begin{array}{r} 3x + 9 \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = (x + 3)(x^2 + 4x + 3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

نجد المميز للمعادلة التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

$$a=1$$

$$b=4$$

$$c=3$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

المميز اكبر من صفر(موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادلة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{or} \quad x = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

بالتالي

$$x=-3 \text{ or } x=-1$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$$

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = (x + 3)(x^2 + 4x + 3) =$$

$$(x + 3)(x + 3)(x + 1)$$

طريقة اخرى

$$x=-1$$

جذر القسوم عليه

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \textcircled{-1} \end{array}$$

معاملات القسوم

1	7	15	9
+	-3	+	-6
1	6	9	0

مدخل إلى الرياضيات

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x^2 + 6x + 9)$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

نجد المميز للمعادلة التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

$$a=1$$

$$b=6$$

$$c=9$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

المميز يساوي صفرياً في هذه الحالة لدينا حل واحد فقط للمعادلة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-6}{2(1)} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 3)(x + 3)$$

مثال

اوجد حل المعادلة التالية

$$6x^5 - 54x^3 = 0$$

$$6x^5 + 28x^3 = 6x^3(x^2 - 9) = 0$$

$$6x^3 = 0 \rightarrow x^3 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

نجد المميز للمعادلة التربيعية

$$a=1$$

$$b=0$$

$$c = -9$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-9) = 0 + 36 = 36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(0) \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{\pm 6}{2(1)}$$

$$x = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{or} \quad x = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\downarrow$$

$$(x-3)$$

$$\downarrow$$

$$(x+3)$$

$$3x^4 + 28x^2 = x^2(x-4)(x+4)$$

# **Fourth Unit Trigonometric Functions**

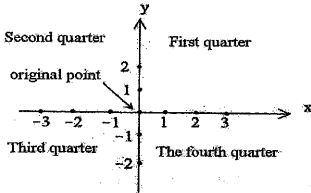


## Fourth Unit Trigonometric Functions

- 1) Angles
- 2) Sine ,Cosine ,Tangent Reciprocal
- 3) Values of Trigonometric functions
- 4) The Right Trigonometric Applications
- 5) Signs of trigonometric Functions Angles



بداية لا بد من التذكير بتعريف قياس الزاوية والذي هو مقدار دوران ضلع ابتدائها حتى يأخذ وضع الانتهاء فإذا كان الدوران باتجاه معاكس لعقارب الساعة كان القياس موجبا (+) وأما إذا كان مع عقارب الساعة كان القياس سالبا (-) ويوجد عدة أشكال لقياس الزوايا نذكر منها القياس بالدرجات والتقدير الدائري



مثال

في أي ربع يقع ضلع الانتهاء لكل من الزوايا التالية:

-170(1)

530(2)

960(3)

(1) لاحظ ان

$$360 - 170 = 190$$

مدخل إلى الرياضيات →

بمعنى ان الزاوية (170-) لها نفس ضلع الانتهاء لزاوية (190) وكذلك  
لاحظ ايضا

$$180 < 190 < 270$$

بالتالي فان الزاوية (170-) تقع في الربع الثالث

(2) لاحظ ان

$$530 - 360 = 170$$

بمعنى ان الزاوية (530) لها نفس ضلع الانتهاء لزاوية (170) وكذلك  
لاحظ ايضا

$$90 < 170 < 180$$

بالتالي فان الزاوية (530) تقع في الربع الثاني

(3) لاحظ ان 960

عبارة من اكثر من دورتين

$$960 - 2 \times 360 = 960 - 720 = 240$$

بمعنى ان الزاوية (960) لها نفس ضلع الانتهاء لزاوية (240) وكذلك  
لاحظ ايضا

$$180 < 240 < 270$$

بالتالي فان الزاوية (530) تقع في الربع الثالث

الراديان (radians) هو قياس زاوية مركزية تقابل قوسا ياسوي وحدة الاطوال ويرمز له بالرمز (1d) ويسمى القياس بالاعتماد على الراديان بالتقدير الدائري

الزاوية 360 تكافئ  $2\pi$

مثال

حول القياسات الآتية إلى التقدير الدائري

$$1) 0^\circ = 0 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{0}{180} = \pi \times 0 = 0$$

$$2) 30^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{30}{180} = \pi \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$3) 45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{45}{180} = \pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$4) 60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{60}{180} = \pi \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$5) 70^\circ = 70 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{7}{18} = \pi \times \frac{7}{18} = \frac{7\pi}{18}$$

$$6) 80^\circ = 80 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{8}{18} = \pi \times \frac{4}{9} = \frac{4\pi}{9}$$

$$7) 90^\circ = 90 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{90}{180} = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$8) 100^\circ = 100 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{10}{18} = \pi \times \frac{5}{9} = \frac{5\pi}{9}$$

$$9) 110^\circ = 110 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{11}{18} = \pi \times \frac{11}{18} = \frac{11\pi}{18}$$

$$10) 120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{120}{180} = \pi \times \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$11) 130^\circ = 130 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{130}{180} = \pi \times \frac{13}{18} = \frac{13\pi}{18}$$

$$12) 150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{150}{180} = \pi \times \frac{5}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$13) 180^\circ = 180 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{180}{180} = \pi \times 1 = \pi$$

$$14) -225^\circ = -225 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{-225}{180} = \pi \times \frac{-5}{4} = \frac{-5\pi}{4}$$

$$15) -90^\circ = -90 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{-90}{180} = \pi \times \frac{-1}{2} = \frac{-\pi}{2}$$

$$16) 270^\circ = 270 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{270}{180} = \pi \times \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$17) 315^\circ = 315 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{315}{180} = \pi \times \frac{7}{8} = \frac{7\pi}{8}$$

$$18) 360^\circ = 360 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{360}{180} = \pi \times 2 = 2\pi$$

### Sine ,Cosine ,Tangent Reciprocals

تعريف اقتران الجيب (cosine) هو اقتران يربط العدد الحقيقي  $\theta$  بالاحداثي y لنقطة تقاطع الزاوية التي قياسها  $\theta$  مع دائرة الوحدة ويرمز له بالرمز

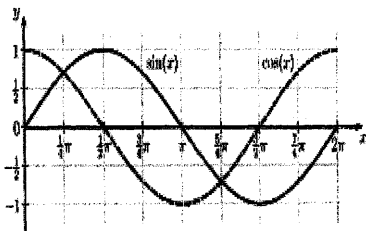
$$f(\theta) = \sin\theta$$

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$

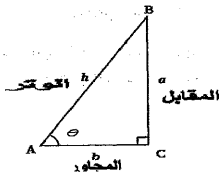
تعريف اقتران جيب التمام (cosine) هو اقتران يربط العدد الحقيقي  $\theta$  بالاحداثي x لنقطة تقاطع الزاوية التي قياسها  $\theta$  مع دائرة الوحدة ويرمز له بالرمز

$$f(\theta) = \cos\theta$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$



الشكل اعلاه يوضح شكل اقتران الجيب وجيب التمام ويوضح العلاقة بينهما



$$1) \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{h}$$

$$2) \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{h}$$

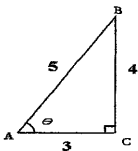
$$3) \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b}$$

$$4) \cotan \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{b}{a}$$

$$5) \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{h}{b}$$

$$6) \operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{h}{a}$$

مثال



$$1) \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{h} = \frac{4}{5}$$

$$2) \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{h} = \frac{3}{5}$$

$$3) \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{3}$$

$$4) \cotan \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{3}{4}$$

$$5) \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{h}{b} = \frac{5}{3}$$

$$6) \operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{h}{a} = \frac{5}{4}$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\sin 0 = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\sin \pi = 0$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos 2\pi = 1$$

$$\sin 2\pi = 0$$

تذكر معادلة الدائرة لدائرة الوحدة

$$x^2 + y^2 = 1$$

ولكن ما هي معادلة الدائرة

تعرف الدائرة على أنها المحل الهندسي لمجموعة النقاط  $(x, y)$  في المستوى التي تبعد عن نقطة ثابتة مقداراً ثابتاً تسمى النقطة الثانية بالمركز والبعد بنصف القطر

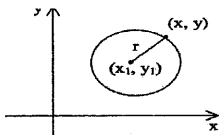
قانون المسافة بين نقطتين

$$r = \sqrt{(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2}$$

$$r^2 = (y - y_1)^2 + (x - x_1)^2$$

هذه المعادلة تسمى بمعادلة الدائرة في الوضع القياسي حيث احدائيات

المركز  $(x_1, y_1)$  ونصف القطر  $r$



مثال: اوجد معادلة لدائرة احداثيات مركزها  $(1, -2)$  وتمر بالنقطة  $(4, 2)$

$$r = \sqrt{(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$r^2 = (y - y_1)^2 + (x - x_1)^2$$

بتالي فان معادلة الدائرة هي

$$25 = (y + 2)^2 + (x - 1)^2$$

باستخدام معادلة الدائرة ينتج

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

لاحظ ان الزاوية في

الربع الاول يكون  $\sin$  موجب و  $\cos$  موجب

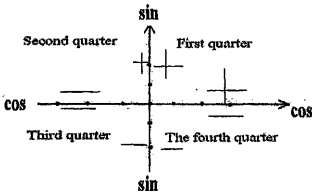
الربع الثاني يكون  $\sin$  موجب و  $\cos$  سالب

الربع الثالث يكون  $\sin$  سالب و  $\cos$  سالب

الربع الرابع يكون  $\sin$  سالب و  $\cos$  موجب



كما هو موضح في الشكل ادناه



مثال

إذا كان

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

أوجد  $\cos\theta$

باستخدام المتطابقة

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \rightarrow \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بمعنى أن الزاوية تقع إما في الربع الأول أو الربع الثاني

مثال

إذا كان

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

أوجد  $\cos\theta$ 

باستخدام المتطابقة

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\cos\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بمعنى أن الزاوية تقع إما في الربع الأول إذا كانت + أو الربع الثاني

$$1) \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$2) \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$3) \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$4) \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

مثال

إذا كان

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أوجد  $\sec\theta, \operatorname{cosec}\theta, \cos\theta, \tan\theta, \operatorname{cotan}\theta$  علما بأن الزاوية تقع في

الربع الأول

باستخدام المتطابقة

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\cos\theta = \pm \frac{1}{2}$$

وبما الزاوية تقع أما في الربع الأول

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$1) \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$2) \operatorname{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3) \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$4) \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

مثال

إذا كان

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مدخل إلى الرياضيات

أوجد  $\sec\theta, \operatorname{cosec}\theta, \sin\theta, \tan\theta, \operatorname{cotan}\theta$  علماً بأن الزاوية تقع في

الربع الرابع

باستخدام المتطابقة

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \rightarrow \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبما الزاوية تقع أما في الربع الرابع

$$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1) \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$$

$$2) \operatorname{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$$

$$3) \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$4) \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

مثال

إذا كان

$$\sec\theta = 2$$

أوجد،  $\cos\theta, \operatorname{cosec}\theta, \sin\theta, \tan\theta, \operatorname{cotan}\theta$  معلما بأن الزاوية تقع في الربع الأول

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = 2 \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$1)\cos\theta = \frac{1}{2}$$

باستخدام المتطابقة

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sin\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبما الزاوية تقع اما في الربع الاول

$$2)\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3)\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$4)\operatorname{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$5)\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Function	0	$30 = \frac{\pi}{6}$	$45 = \frac{\pi}{4}$	$60 = \frac{\pi}{3}$	$90 = \frac{\pi}{2}$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير موجود
Cot	غير موجود	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	غير موجود
Csc	غير موجود	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

نظرية

$$1) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$2) \sec(a - b) = \frac{1}{\cos(a - b)} = \frac{1}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

$$3) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$4) \sec(a + b) = \frac{1}{\cos(a + b)} = \frac{1}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

$$5) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$6) \operatorname{cosec}(a - b) = \frac{1}{\sin(a - b)} = \frac{1}{\sin a \cos b - \cos a \sin b}$$

$$7) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$8) \operatorname{cosec}(a + b) = \frac{1}{\sin(a+b)} = \frac{1}{\sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

$$9) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$10) \cot(a - b) = \frac{1}{\tan(a-b)} = \frac{1}{\frac{\tan a - \tan b}{1 - 2 \tan a \tan b}} = \frac{1 - 2 \tan a \tan b}{\tan a - \tan b}$$

$$11) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$12) \cot(a + b) = \frac{1}{\tan(a+b)} = \frac{1}{\frac{\tan a + \tan b}{1 - 2 \tan a \tan b}} = \frac{1 - 2 \tan a \tan b}{\tan a + \tan b}$$

مثال

إذا كان

$$\sin a = \frac{3}{5} \quad \cos b = \frac{5}{13}$$

والزاويتين  $a, b$  تقعان في الربع الأول فاوجد

1)  $\cos(a - b)$

2)  $\sec(a - b)$

3)  $\cos(a + b)$

4)  $\sec(a + b)$

5)  $\sin(a - b)$

6)  $\operatorname{cosec}(a - b)$

7)  $\sin(a + b)$

8)  $\operatorname{cosec}(a + b)$

9)  $\tan(a - b)$

10)  $\cot(a - b)$

11)  $\tan(a + b)$

12)  $\cot(a + b)$

$$\cos a^2 + \sin a^2 = 1$$

$$\cos a^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \rightarrow \sin a^2 = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos a = \pm \frac{4}{5}$$

وبما الزاوية تقع اما في الربع الاول

$$\cos a = \frac{4}{5}$$

$$\cos b^2 + \sin b^2 = 1$$

$$\sin b^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \rightarrow \sin b^2 = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\sin b = \pm \frac{12}{13}$$

وبما الزاوية تقع اما في الربع الاول

$$\sin b = \frac{12}{13}$$

$$\sin a = \frac{3}{5} \quad \cos a = \frac{4}{5}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\sin b = \frac{12}{13} \quad \cos b = \frac{5}{13}$$

$$\tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

$$1) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = 0.86$$

$$2) \sec(a - b) = \frac{1}{\cos(a-b)} = \frac{1}{0.86} = 1.16$$



$$3) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = -0.2461538$$

$$4) \sec(a + b) = \frac{1}{\cos(a+b)} = \frac{1}{-0.2461538} = -4.0625$$

$$5) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = -0.5076923$$

$$6) \operatorname{cosec}(a - b) = \frac{1}{\sin(a-b)} = \frac{1}{-0.5076923} = -1.969697$$

$$7) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = 0.969230$$

$$8) \operatorname{cosec}(a + b) = \frac{1}{\sin(a+b)} = \frac{1}{0.969230} = 1.031746$$

$$9) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{12}{5}}{1 + (\frac{3}{4} \times \frac{12}{5})} = \frac{-1.65}{2.8} = 0.5892857$$

$$10) \cot(a - b) = \frac{1}{\tan(a-b)} = \frac{1}{0.5892857} = 1.69696969$$

$$11) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - (\frac{3}{4} \times \frac{12}{5})} = \frac{3.15}{-0.8} = -3.9375$$

$$12) \cot(a + b) = \frac{1}{\tan(a+b)} = \frac{1}{-3.9375} = -0.253968254$$

إذا كان

$$\sin a = 1 \quad \cos b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

والزاويتين  $a, b$  تقعان في الربع الأول فأوجد

1)  $\cos(a - b)$

2)  $\sec(a - b)$

3)  $\cos(a + b)$

4)  $\sec(a + b)$

5)  $\sin(a - b)$

6)  $\operatorname{cosec}(a - b)$

7)  $\sin(a + b)$

8)  $\operatorname{cosec}(a + b)$

9)  $\tan(a - b)$

10)  $\cot(a - b)$

11)  $\tan(a + b)$

12)  $\cot(a + b)$

$$\cos a^2 + \sin a^2 = 1$$

$$\cos a^2 + (1)^2 = 1 \rightarrow \sin a^2 = 1 - (1)^2 = 1 - 1 = 0$$

$$\cos a = 0$$

$$\cos b^2 + \sin b^2 = 1$$

$$\sin b^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \rightarrow \sin b^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبما الزاوية تقع اما في الربع الاول

$$\sin b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin a = 1 \quad \cos a = 0 \quad \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{0} = \text{غير موجود}$$

$$\sin b = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos b = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

$$1) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b = 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071067$$

$$2) \sec(a - b) = \frac{1}{\cos(a - b)} = \frac{1}{0.7071067} = 1.41421356$$

$$3) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -0.7071067$$

$$4) \sec(a + b) = \frac{1}{\cos(a + b)} = \frac{1}{-0.7071067} = -1.41421356$$

$$5) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 - 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106$$

$$6) \operatorname{cosec}(a - b) = \frac{1}{\sin(a - b)} = \frac{1}{0.707106} = 1.41421356$$

$$7) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 - 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106$$

$$8) \operatorname{cosec}(a + b) = \frac{1}{\sin(a + b)} = \frac{1}{0.707106} = 1.4142135$$

$$9) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{0} - 1}{1 + (\frac{3}{4} \times \frac{12}{8})} = \text{غير موجود}$$

$$10) \cot(a - b) = \frac{1}{\tan(a - b)} = \text{غير موجود}$$

$$11) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{0} + 1}{1 - (\frac{3}{4} \times 1)} = \text{غير موجود}$$

مثال

بدون استخدام الآلة الحاسبة اوجد قيمة ما يلي

1)  $\cos 15$       2)  $\sin 42 \cos 12 - \cos 42 \sin 12$       3)  $\tan 105$

4)  $\cos 75$       5)  $\sin 30 \cos 15 + \cos 30 \sin 15$       6)  $\tan 75$

7)  $\operatorname{cosec} 15$

$$1) \cos 15 = \cos(60 - 45) = \cos 60 \cos 45 + \sin 60 \sin 45$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$2) \sin 42 \cos 12 - \cos 42 \sin 12 = \sin(42 + 12) = \sin 30 = 0.5$$

$$3) \tan 105 = \frac{\tan 60 + \tan 45}{1 - \tan 60 \tan 45} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - (\sqrt{3} \times 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

$$4) \cos 75 = \cos(45 + 30) = \cos 30 \cos 45 - \sin 45 \sin 30$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$5) \sin 30 \cos 15 + \cos 30 \sin 15 = \sin(30 + 15) = \sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$6) \tan 75 = \frac{\tan 30 + \tan 45}{1 - \tan 30 \tan 45} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} - (1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1}$$

$$\operatorname{cosec}(15) = \frac{1}{\sin(15)} = \frac{1}{\sin(60-45)}$$

$$\sin(60 - 45) = \sin 60 \cos 45 - \cos 60 \sin 45 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{cosec}(15) = \frac{1}{\sin(15)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

مثال

بين ان

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\sin(\pi + x) = \sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x = 0 \times \cos x - 1 \times \sin x = -\sin x$$

مثال

بين ان

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

مدخل إلى الرياضيات

$$\cos(\pi - x) = \cos\pi\cos x + \sin\pi\sin x = -1 \times \cos x + 0 \times \sin x = -\cos x$$

مثال

بين ان

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(\pi + x) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x = 1 \times \cos x + 0 \times \sin x = \cos x$$

نظرية

$$1) \sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$2) \sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$3) \cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$4) \cos x - \cos y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

مثال

بدون استخدام الآلة الحاسبة اوجد

$$\sin 105 - \sin 15$$

$$\begin{aligned} \sin 105 + \sin 15 &= 2 \cos \left( \frac{105+15}{2} \right) \sin \left( \frac{105-15}{2} \right) = \\ 2 \cos \left( \frac{120}{2} \right) \sin \left( \frac{90}{2} \right) &= 2 \cos(60) \sin(45) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

نظرية

$$1) \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2) \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$3) \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$4) \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$5) \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

مثال

إذا علمت أن

$$\sin x = \frac{3}{5} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

أوجد

$$1) \sin 2x$$

$$2) \cos 2x$$

$$3) \tan 2x$$

$$\cos x = \frac{4}{5}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos x = \pm \frac{4}{5}$$

$$\cos a = \frac{4}{5}$$

$$1) \sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$2) \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \frac{4^2}{5^2} - 1 = \frac{-7}{25}$$

$$3) \tan 2x = \frac{2 \left( \frac{3}{5} / \frac{4}{5} \right)}{1 - \left( \frac{3}{5} / \frac{4}{5} \right)^2} = \frac{-24}{7}$$

نموذج اختبار لتقييم الذاتي لدى استيعاب المصطلحات والمفاهيم الرياضية

التي تم ذكرها سابقا

السؤال الأول ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة:

1- اذا كان  $f(x) = 2^x$  فان  $f(1)$  تساوي

2(a)

1(b)

4(c)

(d) لا شيء من ما ذكر

2-  $\log_4(64)$  تساوي

3(a)

2(b)

1(c)

4(d)



3- إذا كان  $f(x) = \ln(x - 2)$  فإن مجال الاقتران هو

- (a) كل الأعداد بحيث أن  $x$  أكبر من 2
- (b) كل الأعداد بحيث أن  $x$  أصغر من 2
- (c) كل الأعداد بحيث أن  $x$  أكبر من -2
- (d) كل الأعداد بحيث أن  $x$  أصغر من -2

4- إذا كان  $\log_3 2 \approx 0.6309$  فإن  $\log_3 16$  يساوي

- (a) 2.5263
- (b) 2.5236
- (c) 2.2564
- (d) لا شيء من ما ذكر

5-  $-\log_{10}(1000)$  يساوي

- (a) -3
- (b) 3
- (c) 0.33333
- (d) -0.33333

6- ان مجموعة الأعداد  $\{1, 2, 3, \dots\}$  هي مجموعة الأعداد

(a) الطبيعية

(b) الحقيقية

(c) الصحيحة

(d) النسبية

7- اذا كان  $f(x) = 3x^2 - 6$  فان  $f(2)$  تساوي

(a) 6

(b) -6

(c) 0

(d) 12

8- اذا كان  $f(x) = x^2 - 3x^3 + 9$  فان مثل هذا الاقتران يسمى كثير

حدود من الدرجة

(a) الثالثة

(b) الثانية

(c) الاولى

(d) الرابعة

9- إذا كان  $f(x) = 4 + x$  و  $g(x) = x - 4$  فإن  $(f-g)$  يساوي

8 (a)

-8 (b)

$2x$  (c)

$-2x$  (d)

10- إذا كان  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$  فاي من الاعداد التالية يعتبر

عامل للاقتران

3 (a)

-3 (b)

0.3333 (c)

-0.3333 (d)

ويسمى بـ  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

11- يستخدم هذا القانون في إيجاد العوامل

(a) فرق مكعبين

(b) مجموع مكعبين

(c) مضروب مكعبين

(d) مقسوم مكعبين

12- يعتبر المميز من الطرق المستخدمة في الكشف عن عدد اصفار الاقتران

التربيعي في حالة ان ناتج المميز يساوي صفر فان ذلك يشير الى وجود

(a) صفر حقيقي واحد فقط

(b) صفرين حقيقيين

(c) ثلاثة اصفار

(d) لا يوجد اصفار حقيقية

13- اذا كان  $f(x) = -x^2 + 4x - 4$  فان اصفار الاقتران

(a) -2

(b) 2

(c) 0.5

(d) -0.5

14- باقي قسمة  $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x+2}$  يساوي

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

15- باقي قسمة  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2x + 3$  على  $h(x) = x - 3$

هو

0 (a)

1 (b)

2 (c)

3 (d)

16- باقي قسمة  $f(x) = x^3 - 2x + 1$  على  $h(x) = x - 2$  باستخدام

القسمة التركيبية

25 (a)

-25 (b)

52 (c)

-52 (d)

17- إذا كان  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  فإن  $(x-a)$  تمتبر من عوامل الاقتران

حيث  $a$  تساوي

1 (a)

-1 (b)

0.5 (c)

-0.5 (d)

18- الزاوية  $\frac{\pi}{4}$  تكافئ بالدرجات الزاوية

45 (a)

90 (b)

60 (c)

30 (d)

19- الزاوية  $\frac{2\pi}{3}$  تكافئ بالدرجات الزاوية

120 (a)

130 (b)

140 (c)

180 (d)

20- في المستوى الديكارتي الربع الاول يكون الجيب وجيب التمام

(a) كلاهما موجبان

(b) كلاهما سالب

(c) الجيب يساوي جيب التمام

(d) ليس من ما ذكر

21- قيمة الزاوية  $x$  بحيث ان  $\sin x = -\cos x$  هي

135 (a)

90 (b)

120 (c)

150 (d)

22- قيمة الزاوية  $x$  بحيث ان  $\sin x = \cos 2x = 0.5$  هي

30 (a)

60 (b)

90 (c)

180 (d)

23- قيمة  $\sec 30$  تساوي

2 (a)

0.5 (b)

-2 (c)

-0.5 (d)

24- قيمة cosec 90 تساوي

1 (a)

0 (b)

-1 (c)

2 (d)

25- قيمة cot 90 تساوي

0 (a)

1 (b)

(c) غير معرفة

1 (d)

السؤال الثاني: إذا كان

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

أوجد:

$$f(0) - 1$$

$$f(2) - 2$$

$$f(4) - 3$$

$$f(6) - 4$$



السؤال الثالث: إذا كان  $\log_3 2 \approx 0.6309$  أوجد

1)  $\log_3 16$

2)  $\log_3 27$

السؤال الرابع: أوجد

$$\log_{10}(100) - 1$$

$$\log_{10}(0.1) - 2$$

$$\log_4(16) - 3$$

السؤال الخامس: عين الأزواج المرتبة

A(0,1),    B(-5,2),    C(-4,-3),    D(-5,0)

السؤال السادس

أوجد مجال الاقتربات التالية:

$$1 - f(x) = \sqrt{x^2 - 81}$$

$$2 - h(x) =$$

$$3 - Z(x) =$$

$$4 - h(x) =$$

## السؤال السابع:

1) باستخدام القسمة الطويلة اوجد ناتج وباقي قسمة

$$h(x) = x - 3 \text{ على } f(x) = x^3 - 2x + 2$$

2) باستخدام القسمة التركيبية اوجد ناتج وباقي قسمة

$$h(x) = x - 1 \text{ على } f(x) = x^4 + 2x - 3$$

## السؤال الثامن: عين الأزواج المرتبة

$$A(0,0), \quad B(-2,2), \quad C(-4,-4), \quad D(-5,-5)$$

## السؤال التاسع:

1) اكتب الحدود الثلاثة الأولى للمتسلسلة التالية:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2r}{(1-4r)}$$

ب) استخدم رمز المجموع ( $\Sigma$ ) لتعبير عن المتسلسلات التالية:

$$1) 3+5+7+9+11+131)$$

ج) اوجد الحد العام للمتاليات التالية لتعبير عن المتسلسلة التالية:

$$1) 1, -1, 1, -1$$

د) جد الحد العام للمتتالية الحسابية التالية

حدها الأول 4 وأساسها 3

السؤال العاشر:

(أ) ارسم منحنى الاقتران المعطى بالقاصده التالية:

$$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$$

(ب) اوجد مجال الاقترانات التالي

$$1) z(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$2) h(x) = \sqrt{x^2 - 16}$$

السؤال الحادي عشر: اذا كان

$$f(x) = 6 + x$$

$$g(x) = x - 6$$

اوجد

$$1) (f + g)(x)$$

$$2) (f - g)(x)$$

$$3) (f \cdot g)(x)$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

$$5) (2f + 3g)(x)$$

السؤال الثاني عشر:

(أ) اوجد جنود المعادلة

$$x^2 + 3x + 2$$

(ب) باستخدام نظرية العوامل اوجد جذور المعادلة

$$-x^3 - 6x^2 - 11x - 6 = 0$$

ج) باستخدام طريقة فرق مكعبين اوجد جذور المعادلة

$$x^3 - 64$$

السؤال الثالث عشر:

(أ) في أي ربع يقع ضلع الانتهاء لكل من الزوايا التالية:

(1)  $-130^\circ$

(2)  $630^\circ$

(ب) حول القياسات الآتية إلى التقدير الدائري

1)  $10^\circ$

2)  $125^\circ$

السؤال الرابع عشر: إذا كان

$$\sin \theta = \frac{1}{3}$$

اوجد،  $\sec \theta, \operatorname{cosec} \theta, \cos \theta, \tan \theta, \cot \theta$  علماً بأن الزاوية تقع في

الربع الأول

السؤال الخامس عشر: إذا كان

$$\sin a = \frac{1}{7} \quad \cos b = \frac{1}{3}$$

والزاويتين  $a, b$  تقعان في الربع الأول فاوجد

1)  $\cos(a - b)$

2)  $\sec(a - b)$

3)  $\cos(a + b)$

4)  $\sec(a + b)$

5)  $\sin(a - b)$

6)  $\operatorname{cosec}(a - b)$

7)  $\sin(a + b)$

8)  $\operatorname{cosec}(a + b)$

9)  $\tan(a - b)$

10)  $\cot(a - b)$

11)  $\tan(a + b)$

12)  $\cot(a + b)$

## Refereces

1- الرياضيات لطلبة تكنولوجيا المعلومات والمكتبات والعلوم الهندسية.

المؤلف

(1) محمد حسين رشيد

(2) يزن إبراهيم مقبل

(3) م. والى طه الراموش

2- Salas, Calculus one several variables .

3- Elenco (1997) algebraai, McGraw- hill was terville, oh.

4- Gorg Knillan other (2000) Mathpower, Ontario Edaition McGraw hill.

الرياضيات للمرحلة الثانوية الفرع العلمي

5- Glencoe (1997) Algebra I McGraw- Hill, Wesleriville, OH.

المواقع الإلكترونية:

1- toutorial. Math- lamar-edu/classes/calcl

2- En. Eikipedia. Org/ wiki Exponanial – Function.

3- WWW. Themath page. Com/ aprecalc









