الهندسة الإقليدية المتقدمة

تأليف

ألفرد إس. بوسمنتير

ترجمة

د. عبدالله بن محمد الجوعي

جامعة الملك سعود

النشر العلمي و المطابع

www.ksu.edu.sa

ISBN 9786035070355

ردمك

35-5

9 786035 070355

بسم الله الرحمن الرحيم

الهندسة الإقليدية المتقدمة

تأليف

ألفرد إس. بوسمنتير

أستاذ تعليم الرياضيات بجامعة سيتي بنيويورك

ترجمة

د. عبد الله بن محمد الجوعي

الأستاذ المشارك بقسم الرياضيات بكلية المعلمين

جامعة الملك سعود

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

هذه ترجمة عربية مصرح بها من قبل مركز الترجمة بالجامعة لكتاب :

Advanced Euclidean Geometry
By Alfred S. Posamentier

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

إس ، بوسمنتير، الفرد

الهندسة الإقليدية المتقدمة . / ألفرد إس. بوسمنتير ؛ عبدالله بن محمد الجوعي

– الرياض ، ١٤٣٣هـ

٣٩٤ص ؛ ١٧سم × ٢٤سم

ردمك : ٥-٠٣٥-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

١-الهندسة ٢- الرياضيات التطبيقية الجوعي، عبدالله محمد (مترجم)

أ- العنوان

ديوي ، ٥١٦ ١٤٣٣/٦١٢٠

رقم الإيداع : ١٤٣٣/٦١٢٠

ردمك : ٥-٠٣٥-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة ، وقد وافق المجلس العلمي على نشره في اجتماعه التاسع عشر للعام الدراسي ١٤٣٢/١٤٣٣هـ، المعقود بتاريخ ١٤٣٣/٦/٢٢هـ، الموافق١٣/٥/٢٠١٢م

النشر العلمي والمطابع ١٤٣٣هـ

مقدمة المترجم

تعد الهندسة الإقليدية من أقدم فروع الرياضيات وأغزرها أفكاراً ومفاهيم، وتتسم بالمرونة والتنوع حتى تجاوزت الطرائق المختلفة لبرهنة حقيقة واحدة، مثل نظرية فيثاغورس ثلاثمائة طريقة مختلفة. كما تستخدم الهندسة الإقليدية معظم الفروع الأخرى للرياضيات كالمنطق والجبر وحساب المثلث وغيرها.

ورغم أهمية وقدم هذا الفرع من الرياضيات إلا أن كثيراً من الدول تقتصر في دراسته على المرحلة الثانوية، ولا تعطي أي مقرر في جامعاتها في الهندسة الإقليدية المتقدمة، ولم تكن المملكة العربية السعودية بمعزل عن هذا التوجه، فلا تكاد تجد مقرراً جامعيًّا يعنى بهذا الفن؛ وكنتيجة لذلك فقد أصبحت الكتب العربية في الهندسة الإقليدية شحيحة جداً، وظلت نظريات ومفاهيم جميلة حبيسة الكتب الأجنبية كنظرية شيفا، ونظرية ميكول، ونظرية ستيوارت، وخط سيمسون، ودائرة النقاط التسع ونحوها. وقد عزز من أهمية هذا الموضوع كونه حقلاً من حقول أربعة معتمدة في مادة الأولمبياد الدولي للرياضيات، والذي تكون أسئلته - عادة - غاية في الصعوبة.

لقد وقع الاختيار على كتاب " الهندسة الإقليدية المتقدمة لمؤلفه " ألفرد بو سمنتير" للترجمة إلى العربية لعدة عوامل، منها سلاسة الكتاب وأسلوبه الجميل،

ومنها شموله للموضوعات المتقدمة وعرضه إياها بطريقة متدرجة، كما أن الكتاب أساساً تم تأليفه لمعلمي وطلاب المرحلة الثانوية، فهو ينطلق من أساسيات وخلفية تلك المرحلة ويعطي مزيداً من التفاصيل والنتائج. هذا بالإضافة إلى كونه يعتمد آليات بناء وإنشاء الأشكال الهندسية مستخدماً المسلمات والنتائج السابقة. ومما يتميز به هذا الكتاب ربطه هندسة إقليدس بفروع الرياضيات الأخرى، كما فعل المؤلف في الفصل الحادي عشر.

لقد قمت بتصحيح بعض الأخطاء المطبعية والحسابية مثل منطوق وبرهان نظرية 12-11. وأشير هنا إلى أن الكتاب الأصل تم رسم كافة أشكاله باستخدام برنامج Geomete's Sketchpad لتكون أشكالاً تفاعلية تتم دراستها بالاستعانة بـ CD مرفق بالنسخة الإنجليزية، وهو ما لا يتوافر في هذه الترجمة العربية. ولذا، فكل ما ورد ذكر الـ CD في ثنايا هذه الترجمة فيقصد به الكتاب الأصل دون هذه الترجمة.

وأود أن أقدم شكري العميق لسعادة الأستاذ / **طارق سلامة صابر** الذي راجع مسودة هذه الترجمة وساعد كثيرا في تلافي الأخطاء والسقطات حتى جاءت الترجمة بصورة مقبولة. كما أتقدم بالشكر لسعادة الأستاذ / **صفوت الطناني** الذي راجع المسودة النهائية لهذه الترجمة.

أعتقد أن هذا الكتاب مناسب لبناء قاعدة صلبة في الهندسة الإقليدية تهيئ القارئ لمواجهة مسائل غير تقليدية في الهندسة الإقليدية، كما تهيئه لقراءة مزيد من المفاهيم المتقدمة في هذا المضمار.

المترجم

مقدمة المؤلف

إلى القرن التاسع عشر، كان يُعتقد أن النتائج المهمة حول هندسة المثلث والدائرة قد تم اكتشافها بواسطة إقليدس والسابقين له. وفي القرن التاسع عشر، ظهرت نتائج غزيرة عممت النتائج السابقة وأضافت لها عدة علاقات مهمة تم اكتشافها، أضفت الحياة من جديد على الهندسة الإقليدية. هذا الكتاب يقدم خطوطاً عريضة للجديد في هذا المجال بطريقة مشوقة. باختصار، هذا الكتاب صُمِّم ليعطي نظرة شمولية للهندسة الإقليدية من أجل بناء وتعزيز خلفية معلم المرحلة الثانوية.

خلال القرون الثلاثة الماضية، تم كتابة الكثير من الكتب المنهجية لإظهار "عناصر" إقليدس للمشهد المدرسي. أكثر تلك الكتب إشراقاً كتاب "عناصر إقليدس" (Elements of Euclid) الذي ظهر أولاً عام ١٧٥٦م لمؤلفه روبرت سيمسون Robert Simson وكتاب أدرين لجندر Adrien Legendre ((عناصر الهندسة)) الذي طبع بالفرنسية عام ١٧٩٤م وتمت مراجعته وترجمته إلى الإنجليزية عام ١٨٢٨م بواسطة الأستاذ الجامعي تشارلز ديفيز Charles Davies. كتاب ديفيز (لجندر) المترجم أصبح يستخدم بشكل واسع ككتاب مقرر في الولايات المتحدة الأمريكية خلال القرن التاسع عشر، ولعل له الأثر الأكبر في صياغة كتب الهندسة المدرسية اليوم.

هندسة لجندر لم تذكر النظريات بصيغة عامة، إنما استعانت بالأشكال لتوضيح النظريات المختلفة. هذا التحول من هندسة إقليدس تم تصحيحه بواسطة ديفيز، حيث أعطى نظريات عامة متنوعة بشروحات مدعمة بأشكال. هذا الكتاب يستخدم تلك الآليات بالتناوب حسب مقتضى الحال.

دراستنا للهندسة – الهندسة الإقليدية المتقدمة – تبدأ من حيث انتهى مستوى منهج المرحلة الثانوية. ولكن لا يحاول هذا الكتاب استقصاء الدراسة لجميع مفاهيم تلك الموضوعات المتقدمة، وهو أمر مستحيل في كتاب صغير بهذا الحجم، وبدلاً من ذلك سنركز اهتمامنا على موضوعات تهم من أتقن موضوعات المرحلة الثانوية ولديه رغبة في الاستزادة، وحتماً سيلامس الجمال الكامن في دراسة الهندسة الإقليدية المتقدمة.

إحدى المزايا الفريدة لهذا الكتاب تضمين أشكال هندسية تفاعلية موجودة في قرص صلب CD-ROM تستخدم برنامج Geometer's Sketchpad.

غالباً، تُقدم الهندسة بطريقة ثابتة ولا يُعرض فيها المفهوم كما ينبغي. والقارئ مدعو إلى الاطلاع على الأشكال عبر القرص الصلب المرفق وتحريك الأشكال بطرق مختلفة وملاحظة مايحدث.

لفهم وتدريس أي موضوع هنا بطريقة جيدة، يجب الإلمام بأكثر مما يعطى في التدريس. المادة المقدمة هنا تم اختبارها وتقويمها عبر خمس وعشرين سنة من الاستخدام بواسطة عدد هائل من معلمي المرحلة الثانوية في جامعة سيتي في نيويورك استقبلت خلالها عدة اقتراحات قيّمة ظهر أثرها بين دفتي هذا الكتاب.

الدعم الفني لهذا الكتاب قامت به كوكبة من المختصين أشكرهم بعمق، وقد أعدوا برنامج Geometer's Sketchpad الذي رسم الأشكال، الثابت منها والتفاعلي

بطريقة خلابة. وأقدم شكراً خاصاً لـ Jan Siwanowic . كما أشكر David Linker الذي قرأ وراجع مسوّدة الكتاب كاملة. وفي إطار تطوير دليل المعلم، أشكر مجموعة من الطلاب الموهوبين الذين كانت لهم حلول غير تقليدية لبعض مسائل الكتاب تم إدراجها في دليل المعلم، ومن هؤلاء الطلاب Kamaldeep Gandhi، Seth Kleinerman، Leo Nguyen، Oana Pascu، Peter Ruse، Jan Siwanowic.

الطباعة الأولية للكتاب تمت بشكل رائع بواسطة Sandra Finken. وبشكل عام، فإني أشكر مئات الطلاب (وهم معلمون ميدانيون) الذين استخدموا جزءاً من هذا الكتاب خلال الأعوام القليلة المنصرمة وأثروا مادته بملاحظاتهم وتعليقاتهم. هذه الملاحظات جعلتني يقظاً لما أكتب طوال الوقت.

ألفرد بوسمنتير

مدخل

هذا الكتاب يعالج موضوعات هندسية أعلى في مستواها من الموضوعات المدرجة تحت مواد الصفوف العليا في التعليم العام، ولكن هذه المعالجة تتم باستخدام طرق ونظريات أولية. لهذا السبب؛ فقد يكون هذا الكتاب سهل الفهم بالنسبة لطلاب الصفوف العليا المتميزين في هذا المجال. مع العلم أن المستهدف من هذا الكتاب بالدرجة الأولى هم معلمو الرياضيات للصفوف العليا.

إن استخدام لغة رياضية مألوفة في هذا الكتاب يعني أن القارئ لا يحتاج إلى معرفة مفاهيم ونظريات جديدة، وذلك لأن ما في الكتاب عبارة عن استخدامات جديدة لمفاهيم أولية، كما أن الكتاب أيضا يتضمن أفكاراً غنية ستساعد معلمي الصفوف العليا في تطوير برنامجهم التعليمي.

الفصل الأول من هذا الكتاب يتحدث عن أسس الهندسة المعروفة في مواد الصفوف العليا، وقد تضمن بعض التمارين من نمط مختلف والتي هي عبارة عن حقائق تصاغ بطريقة معينة لتُنتج نتائج خاطئة، والمقصود من هذه التمارين هو اكتشاف الأخطاء من خلالها، والذي يتطلب مهارات تفكير عليا.

الفصلان الثاني والثالث يدوران حول محور واحد يشمل موضوعات التقاء المستقيمات في نقطة مشتركة، ووجود النقاط على استقامة واحدة. وهي الموضوعات التي لم تلق مزيد عناية في مواد الصفوف العليا في التعليم العام. وقد برهنت بعض النظريات خلال هذين الفصلين (والتي من الصعوبة برهنتها خلال الحصص الدراسية) بطرق بسيطة. وقد تم استخدام الرسوم الهندسية كتأكيد لصحة هذه النظريات، كما أنها استخدمت أيضا لتعطي تصوراً مباشراً عن المفاهيم بحيث يستطيع القارئ من خلالها أن يفترض بعض الحالات ويعالجها. سنتمكن من تطوير بعض النظريات الرياضية من خلال استخدام معرفتنا بحالات التقاء المستقيمات في نقطة مشتركة وحالات وجود أكثر من نقطتين على استقامة واحدة، كما سيعرض في هذا الفصل.

سيكون التركيز على المثلثات خلال الفصلين الرابع والخامس. الفصل الرابع سيتناول الحديث عن بعض النقاط المثلثية الخاصة غير المألوفة. وفي الفصل الخامس سيكون التركيز على القطع المستقيمة داخل المثلث (والتي يشار لها غالبا بقطع شيفا)، ومن هذه القطع: منصفات الزوايا، والمتوسطات، كما أن هناك عددا من الحقائق المثلثية الجديدة عرضت خلال هذين الفصلين.

معلوم أن تناول الرباعيات الدائرية في الصفوف العليا يقتصر على الرباعيات الخاصة كالمربع والمعين والمستطيل ومتوازي الأضلاع وشبه المنحرف. سيكون الطرح في الفصل السادس من الكتاب مفترضا أن القارئ له معرفة بخصائص هذه الرباعيات. سيبدأ الفصل بمعالجة الرباعي المحدب بشكل عام وسينتهي بتناول الرباعيات الدائرية، وباستخدام نظرية بطليموس سنستنتج العديد من العلاقات الهندسية المفيدة.

في الصفوف العليا في التعليم العام، تتم دراسة الدائرتين الداخلية والخارجية للمثلث كجزء من مادة الهندسة المقررة. وكما هو معلوم أن الدائرة الداخلية تمس

الأضلاع الثلاثة، من المحتمل أن تفترض دائرة أخرى خارج المثلث تمس أحد أضلاعه بالإضافة إلى امتداد الضلعين الآخرين، وبالتالي يكون للمثلث ثلاث دوائر من هذا النمط. إن هذه الدوائر الثلاث بالإضافة إلى الدائرة الداخلية هي محور الدراسة في الفصل السابع، حيث سيتم خلاله اكتشاف عددٍ من العلاقات المفيدة التي تربط هذه الدوائر معا.

من الموضوعات المشهورة في الهندسة الإقليدية المتقدمة، والتي تتضمن عددا من الخصائص المدهشة دائرة النقاط التسع. في الفصل الثامن، سنتناول من محور آخر الحديث عن خصائص ارتفاعات المثلث بالإضافة إلى المثلث المتشكل منها، والذي سيسمح لنا بتطوير بعض الخصائص المتعلقة بدائرة النقاط التسع.

من المسائل الأكثر تحديا في الهندسة، المسائل المتعلقة بكيفية إنشاء مثلث محدد بمجرد معرفة ثلاثة أجزاء منه، كمعرفة أطوال المتوسطات، أو معرفة أطوال الارتفاعات، أو معرفة قياس زاويتين بالإضافة إلى الضلع المشترك بينهما. في الفصل التاسع، سيتم عرض عدد من المسائل المتعلقة بالإنشاءات والتي لا تتطلب معرفة نظرية أكثر مما هو موجود في مادة الهندسة للصفوف العليا. المسائل الإنشائية تعد من المسائل الأكثر تحديا في الهندسة الإقليدية، وهي أيضا تتضمن بعض المسائل التي تتحدى عباقرة الهندسة.

المسألة المعروفة بمسألة "أبولونيوس" كانت قد شغلت أجيالا من الرياضيين على مدار التاريخ. في الفصل العاشر، سيتم عرض عددٍ من التطبيقات المتعلقة بإنشاءات الدوائر، والتي تتطلب عددا من الحالات غير العشوائية، كأن تمر الدائرة بنقطة ثابتة، أو أن تمس مستقيما معلوما، أو أن تمس دائرة معينة. هذه الإنشاءات قد تبدو بسيطة في بعض الحالات، ولكنها في حالات أخرى تبدو أكثر تحديا، وهي - كما هو معلوم - محط تركيز الرياضيين في القرنين السابع عشر والثامن عشر.

الهدف من الفصل الأخير يكمن في إيضاح العلاقة بين الهندسة الإقليدية وبين فروع أخرى من الرياضيات. وهذا الفصل يتضمن أعداد فيبوناتشي والنسبة الذهبية ويلقي الضوء على تلك العلاقة. هذا الفصل - بكل تفاصيله - يمس طرفا من موضوع غني جداً في الرياضيات، وأما الجزء الأخير منه وهو جزء التمارين المكثفة فيُعدّ بداية طريق لاستنتاجات أكثر وأكثر.

نبذة عن المؤلف

ألفرد بوسمنتير، الأستاذ الجامعي في تعليم الرياضيات، عميد كلية التربية في كلية سيتي الجامعية في نيويورك. كما أنه مؤلف ومؤلف مشارك في العديد من كتب الرياضيات للمدرسين في الخدمة ومدرسي المستقبل ولطلاب المدارس الثانوية. تركز منشوراته على تدريس الرياضيات وحل المسائل وتطوير الموضوعات في الهندسة الإقليدية المتقدمة. هذا الكتاب ثمرة العديد من سنوات الخبرة في العمل مع مدرسي الصفوف العليا لإثراء تدريسهم الهندسي.

حصل الدكتور بوسمنتير على الدكتوراه في تعليم الرياضيات من جامعة فوردهام بعد ست سنوات من تدريس الصفوف العليا والتحق الدكتور بوسمنتير بهيئة التدريس في كلية سيتي، وبعد ذلك بوقت بدأ بتطوير المقررات لمعلمي الرياضيات في المدارس الثانوية. حاليا يشارك الدكتور في العمل مع مجموعة من مدرسي الرياضيات، سواء في الولايات المتحدة أو دوليا ؛ ليساعدهم في فهم أفضل الأفكار المقدمة في هذا الكتاب بحيث يمكنهم دمج الأفكار بشكل مريح في برنامجهم التعليمي العادي. كما أنه زميل فخري لدى جامعة ساوث بانك في لندن في إنجلترا. ولقد كان أستاذاً جامعيا في جامعة فينّا، كما كان أستاذاً زائراً لمجموعة من الجامعات الأوربية منها جامعة فينّا التقنية وجامعة همبولت في برلين.

عرف الدكتور بوسمنتير بتدريسه المتميز، سواء في أوروبا أو الولايات المتحدة. لقد حصل على لقب معلم العام سنة ١٩٩٣ من قبل رابطة خريجي كلية سيتي. كما منح وسام الشرف الكبير عام ١٩٩٧ من مدينة فينّا (النمسا). كما حصل مؤخراً على لقب الأستاذ الجامعي للجامعات النمساوية ١٩٩٩.

بعد أكثر من اثنين وثلاثين عاماً على كلية (CCNY)، لا يزال الدكتور يتمتع بالحماس والطاقة المتزايدة لقسم الرياضيات وتعليم الرياضيات. وبشكل خاص، يمكن الشعور بمدى حبه للهندسة في صفحات هذا الكتاب. وبالنظر إلى بعض الموضوعات، فإنها كثيراً ما تهمل أو تدفع بعيداً عن الأضواء من أجل عدد أكبر من الموضوعات (الجذابة). كما يأمل في إعادة هذه المادة العريقة إلى الواجهة بمساعدة أحدث التقنيات.

المحتويات

ص

الفصل الأول

مراجعة أساسيات الهندسة الإقليدية

لنسترجع بعض أساسيات ومفاهيم الهندسية الإقليدية

يحتوي مقرر الهندسة الإقليدية للمرحلة الثانوية على الكثير من النظريات التي ليس من السهولة تذكرها، لذلك كان علينا أن نلقي نظرة وجيزة على هذه النظريات – مع العلم أنه إذا كانت هذه النظريات تقابلك للمرة الأولى ، فإن ذلك سيكون أكثر صعوبة – وقد قسمنا هذه النظريات وفقاً للموضوعات التي ليس من الضروري أن تكون ضمن سلسلة الموضوعات المقدمة أصلاً، ولكننا نقدمها نظراً لأهميتها في شكل واضح ووجيز.

I–الأشكال الرباعية ***Quadrilaterals***

A : طرق إثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع

لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع عليك أن تسلك إحدى هذه الطرق :

1. إثبات أن كل ضلعين متقابلين متوازيان .
2. إثبات أن كل ضلعين متقابلين متطابقان .

3. إثبات أن ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان .
4. إثبات أن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .
5. إثبات أن زاويتين متقابلتين متطابقتان وضلعين متقابلين متوازيان.
6. إثبات أن القطرين ينصف كل منهما الآخر .

B : طرق إثبات أن الشكل الرباعي مستطيل

لإثبات أن الشكل الرباعي مستطيل ، عليك أن تسلك إحدى هذه الطرق :

1. إثبات أن كل زاوية من زواياه الأربع قائمة .
2. إثبات أن الشكل متوازي أضلاع ، وأنه يحوي زاوية واحدة قائمة .
3. إثبات أن الشكل متوازي أضلاع ، وأن قطريه متطابقان .

C : طرق إثبات أن الشكل الرباعي معين

لتثبت أن الشكل الرباعي معين ، عليك أن تسلك إحدى هذه الطرق :

1. إثبات أن أضلاعه الأربعة متطابقة .
2. إثبات أن الشكل متوازي أضلاع به ضلعان متتاليان متطابقان .
3. إثبات أن الشكل متوازي أضلاع وأن قطريه ينصفان زوايا رؤوسه .
4. إثبات أن الشكل متوازي أضلاع وأن قطريه متعامدان .

D : طرق إثبات أن الشكل الرباعي مربع

لتثبت أن الشكل الرباعي مربع ، عليك أن تسلك إحدى هذه الطرق :

1. إثبات أن الشكل مستطيل به ضلعان متتاليان متطابقان .
2. إثبات أن الشكل مستطيل وأن قطريه ينصفان زوايا رؤوسه .
3. إثبات أن الشكل مستطيل وأن قطريه متعامدان .
4. إثبات أن الشكل معين يحوي زاوية واحدة قائمة.

5. إثبات أن الشكل معين وأن قطريه متطابقان .

E : طرق إثبات أن شبه المنحرف متطابق الساقين .

ولتثبت أن شبه المنحرف متطابق الساقين ، عليك أن تسلك إحدى هذه الطرق :

1. إثبات أن الضلعين غير المتوازيين متطابقان.
2. إثبات أن زاويتي القاعدة متطابقتان .
3. إثبات أن كل زاويتين متقابلتين متكاملتان .
4. إثبات أن قطري شبه المنحرف متطابقان .

ملاحظة : نستطيع تعريف شبه المنحرف على أنه شكل رباعي له بالضبط ضلعان متقابلان متوازيان.

II – خط منصف للمثلث ***Midline of a Triangle***

A. القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث هو خط منصف للمثلث.

B. كل خط منصف للمثلث مار بضلعين يوازي الضلع الثالث.

C. طول أي خط منصف للمثلث مار بضلعين يساوي نصف طول الضلع الثالث.

D. الخط المرسوم من منتصف أحد أضلاع مثلث موازياً ضلعاً آخر ينصف الضلع الثالث للمثلث.

III – التشابه ***Similarity***

A : إذا كان لدينا خط يوازي أحد أضلاع مثلث

1. إذا كان هناك مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين ، فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة .

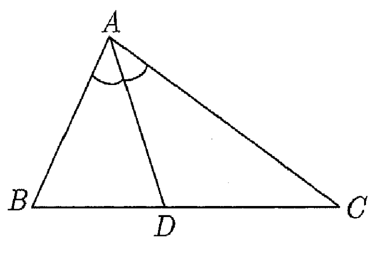
2. إذا قطع مستقيم ضلعي مثلث وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة ، فإن هذا القاطع يوازي الضلع الثالث في المثلث .

B : تناسب يتضمن منصف الزاوية

1. منصف الزاوية الداخلية لأي مثلث يقسم الضلع المقابل لهذه الزاوية إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي ضلعي الزاوية .

على (الشكل $1-1$) $\overline{AD}$ ينصف الزاوية A في ΔABC.

$$\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$$

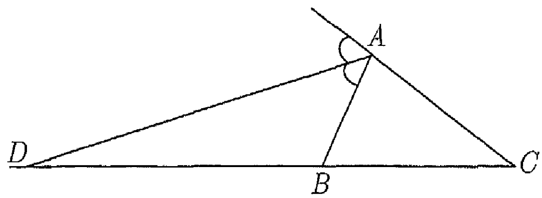


شكل $1-1$

2. عندما يلاقي منصف الزاوية الخارجية امتداد الضلع المقابل لتلك الزاوية في نقطة، فإن بعد تلك النقطة عن كل من الرأسين الآخرين

للمثلث تتناسبان مع طولي ضلعي الزاوية. في الشكل (2 − 1)، $\overline{AD}$ ينصف الزاوية A من الخارج في ΔABC .

$$\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$$



شكل 2 − 1

C : طرق إثبات أن المثلثين متشابهان

1. إذا شابه مثلثان مثلثاً ثالثاً، فإن المثلثات الثلاثة تتشابه .
2. يتشابه المثلثان إذا طابقت زاويتان من أحدهما نظيرتيهما من المثلث الآخر.
3. يتشابه المثلثان إذا تناسب طولا ضلعين من أحدهما نظيريهما من المثلث الآخر، وتطابقت الزاويتان المحصورتان بين هذين الضلعين في كل من المثلثين .
4. يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة.

D : المتوسط المتناسب في المثلث القائم

1. الارتفاع على الوتر من الزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية والذي يقسم الوتر إلى جزأين يجعل طول أحد ضلعي القائمة متوسطاً متناسباً بين طول الوتر وطول الجزء المجاور من الوتر لضلع القائمة المذكور.

2. الارتفاع على الوتر في المثلث القائم الزاوية يكون متوسطاً متناسباً بين طولي قطعتي الوتر المستقيمتين الناتجتين من تقاطع الارتفاع والوتر .

$IV-$ نظرية فيثاغورس ***Pythagorean Theorem***

A : مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة في مثلث قائم يساوي مربع طول الوتر.

B : (عكس نظرية فيثاغورس) إذا كان مجموع مربعي طولي ضلعين في مثلث يساوي مربع طول الضلع الثالث ، فإن الزاوية المقابلة لهذا الضلع تكون قائمة.

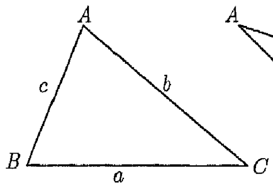
C : في المثلث المتطابق الضلعين والقائم الزاوية.

1. طول الوتر يساوي $\sqrt{2}$ طول ضلع القائمة.
2. طول ضلع القائمة يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ طول الوتر.

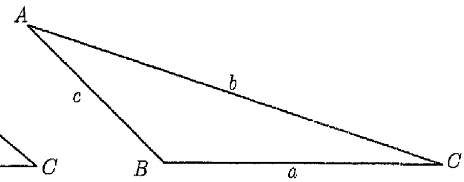
D : في المثلث الثلاثيني الستيني (قياسات زواياه $90° - 60° - 30°$) .

1. طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $30°$ يساوي نصف طول الوتر.
2. طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $60°$ يساوي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول الوتر .
3. طول الوتر يساوي $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $60°$.
4. طول ضلع القائمة الأكبر يساوي $\sqrt{3}$ طول ضلع القائمة الأصغر

E : متباينات فيثاغورس



شكل $1-3$



شكل $1-4$

1. في أي مثلث حاد الزوايا (شكل $1-3$) مربع طول أي ضلع في المثلث أقل من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .

$$a^2 + b^2 > c^2$$

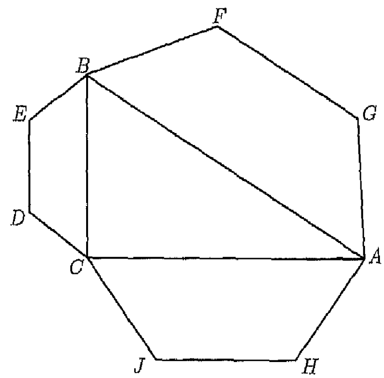
2. في أي مثلث منفرج الزاوية (شكل $1-4$) مربع طول الضلع الأطول أكبر من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .

$$a^2 + b^2 < c^2$$

F : توسعة نظرية فيثاغورس

إذا أنشئت مضلعات متشابهة على أضلاع مثلث قائم الزاوية (على أن يكون من ضمن الأضلاع المتناظرة للمضلعات أضلاع المثلث القائم الزاوية) فإن مساحة المضلع المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي المضلعين المنشأين على الضلعين الآخرين للمثلث . ففي الشكل $(1-5)$:

مساحة $ABFG$ = مساحة $BCDE$ + مساحة $ACJH$



شكل $1-5$

G : ثلاثيات فيثاغورس .

عندما : $a^2+b^2=c^2$ ، ضع $a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$ ،

حيث $m>n$ لتحصل على ثلاثيات تعرف باسم ثلاثيات فيثاغورس.

بعض ثلاثيات فيثاغورس الأولية فيما بينها

$(8,15,17)$ ، $(7,24,25)$ ، $(5,12,13)$ ، $(3,4,5)$

$(20,21,29)$ ، $(12,35,37)$ ، $(11,60,61)$ ، $(9,40,41)$

لاحظ أنه من الممكن الحصول على عدد غير منته من ثلاثيات فيثاغورس وذلك بضرب الأعداد الثلاثة في عدد طبيعي واحد .

V– علاقات الدائرة ***Circle Relations***

A . قياس الزاوية في حالاتها مع الدائرة

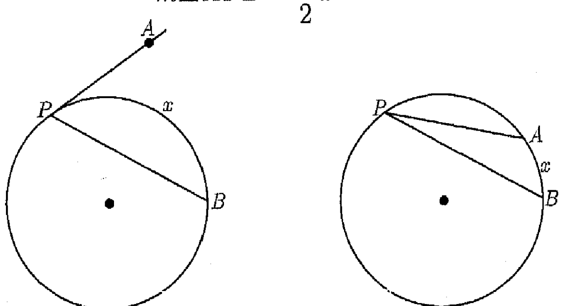
1. قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها .

2. قياس الزاوية المحصورة بين مماس ووتر في الدائرة يساوي نصف قياس القوس المقابل للوتر من جهة الزاوية .
3. قياس الزاوية الناتجة من تقاطع وترين داخل دائرة يساوي نصف مجموع قياسي القوسين الذين أحدهما مقابل للزاوية والآخر مقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.
4. قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطعين للدائرة في نقطة خارجها يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المقابلين لهذه الزاوية .
5. قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس لدائرة في نقطة خارجها يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المقابلين لهذه الزاوية .
6. قياس الزاوية الناتجة من تقاطع مماسين للدائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المقابلين لهذه الزاوية .
7. مجموع قياس الزاوية الناتجة من تقاطع مماسين والقوس الأصغر المقابل لها يساوي $180°$.

وبطريقة بديلة نستطيع عرض النقاط السبع السابقة كما يلي :

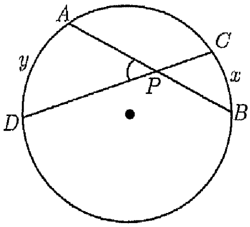
1. إذا وقع رأس زاوية على محيط دائرة فإن قياس هذه الزاوية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها (شكل $6-1$).

$$m\angle APB = \frac{1}{2}x$$



شكل $6-1$

2. إذا وقع رأس زاوية داخل دائرة (شكل 7 − 1) فإن قياس هذه الزاوية يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين لها.

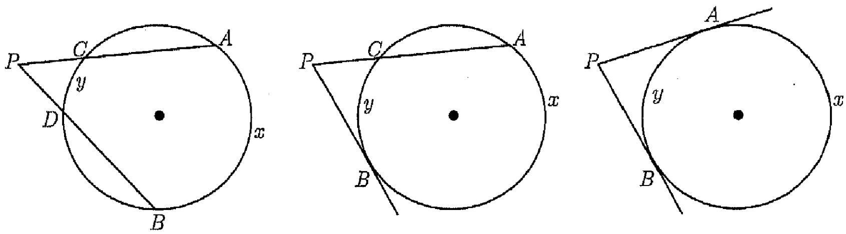


شكل 7 − 1

$$m\angle APD = \frac{1}{2}\left(x + y\right)$$

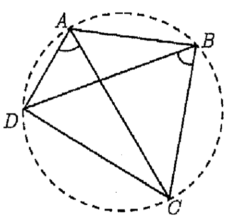
3. إذا وقع رأس زاوية خارج دائرة فإن قياس هذه الزاوية يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المقابلين لها (شكل 8 − 1).

$$m\angle APB = \frac{1}{2}\left(x - y\right)$$



شكل 8 − 1

B . طرق إثبات أن أربع نقاط تقع على محيط دائرة واحدة (الرباعي الدائري هو شكل رباعي تقع رؤوسه الأربعة على دائرة واحدة) .



شكل 9 − 1

1. إذا قابل أحد أضلاع الرباعي زاويتين متطابقتين عند الرأسين الآخرين من الرباعي ، فإن الشكل الرباعي يكون دائريًّا في شكل(9 − 1)، $ABCD$ دائري لأن

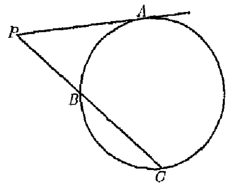
$$\angle DAC \cong \angle CBD$$

2. في أي شكل رباعي، إذا وجد زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموع قياسيهما = $180°$)، فإن الرباعي يكون دائرياً.

C . المماس ، القاطع ، الأوتار في الدائرة .

1. القطعتان المماستان لدائرة المرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

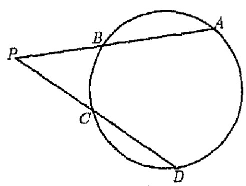
2. إذا رسمنا من نقطة خارج دائرة قطعة مماسة وقاطع لها فإن مربع طول القطعة المماسة للدائرة يساوي حاصل ضرب طول القاطع، وطول الجزء الخارجي من القاطع (شكل $1-10$).



شكل $1-10$

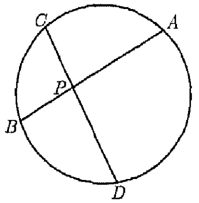
$$\left(AP\right)^2=\left(PC\right)\left(PB\right)$$

3. إذا تقاطع قاطعان لدائرة واحدة في نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول بطول الجزء الخارجي منه يساوي ضرب طول القاطع الآخر بطول الجزء الخارجي منه. (شكل $1-11$). أي أن $\left(AP\right)\left(BP\right)=\left(DP\right)\left(CP\right)$.



شكل $1-11$

4. إذا تقاطع وتران في نقطة داخل دائرة، وقسمت نقطة التقاطع كل وتر إلى جزأين، فإن حاصل ضرب طولي جزئي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولي جزئي الوتر الآخر (شكل 12 − 1).



شكل $12-1$

$$(AP)(BP)=(DP)(CP)$$

VI– التقاطع في نقطة **Concurrency**

A : الأعمدة المنصفة لأضلاع مثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة هي مركز الدائرة الخارجية لهذا المثلث .

B : ارتفاعات المثلث $Altitudes$ الثلاثة تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة تسمى نقطة تقاطع الارتفاعات في المثلث $The\ Orothocenter$.

C : متوسطات المثلث $Medians$ الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كل متوسط بنسبة $2:1$ من جهة القاعدة ، وتسمى هذه النقطة مركز الثقل $The\ Centroid$.

D : منصفات زوايا المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة هي مركز الدائرة الداخلية لهذا المثلث .

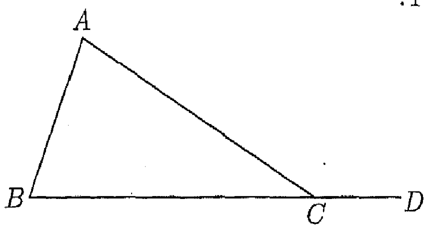
VII– المتباينات **Inequalities**

A : قياس الزاوية الخارجية للمثلث أكبر من قياس أي زاوية فيه عدا المجاورة

لها، في ΔABC الشكل 13 − 1.

، $m\angle ACD > m\angle A$

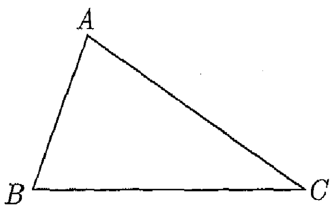
$m\angle ACD > m\angle B$



شكل 13 − 1

B : إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث، فأكبرهما في الطول تقابله زاوية أكبر في القياس.

في ΔABC (الشكل 14 − 1):

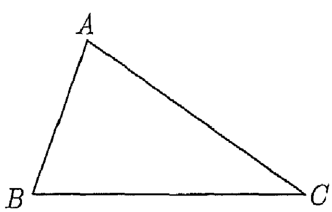


شكل 14 − 1

$AC > AB \Rightarrow m\angle B > m\angle C$

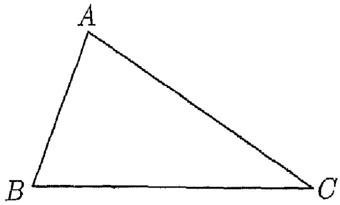
C : إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث، فإن الزاوية الكبرى في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول.

في ΔABC (الشكل 15 − 1) :



شكل 15 − 1

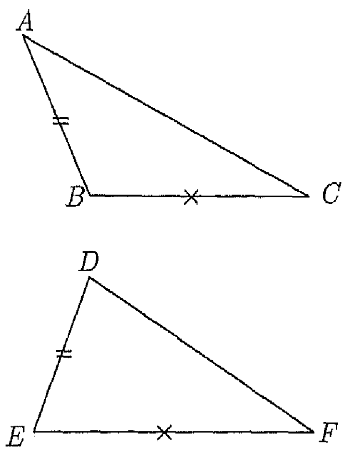
$m\angle A > m\angle C \Rightarrow BC > AB$



شكل 16 − 1

D : مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث. في ΔABC (الشكل 16 − 1)

$$AB + AC > BC$$
$$AB + BC > AC$$
$$AC + BC > AB$$



شكل 17 − 1

E : إذا ساوى طولا ضلعين في مثلث طولي ضلعين في مثلث آخر على الترتيب ، وكان قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الآخر، فإن طول الضلع المقابل لهذه الزاوية في المثلث الأول يكون أكبر من طول الضلع المقابل للزاوية التي في المثلث الآخر.

في $\Delta ABC, \Delta DEF$ (الشكل 17 − 1) :

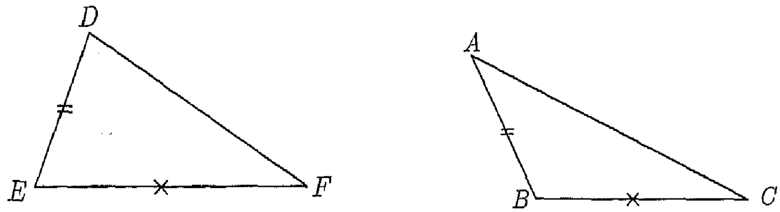
$$AB = DE, BC = EF, m\angle B > m\angle E$$
$$\Rightarrow AC > DF$$

F : إذا ساوى طولا ضلعين في مثلث طولي ضلعين في مثلث آخر على الترتيب، وكان طول الضلع الثالث المقابل للزاوية المحصورة بين هذين الضلعين في المثلث الأول

أكبر من طول الضلع الثالث في المثلث الآخر، فإن قياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الثالث في المثلث الآخر.

في $\Delta ABC, \Delta DEF$ (الشكل $1-18$):

$$AB = DE, BC = EF, AC > DF \quad \Rightarrow m\angle B > m\angle E$$



شكل $1-18$

G: في المثلث الحاد الزوايا ، مربع طول أي ضلع من أضلاعه أقل من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .

H : في المثلث المنفرج الزاوية ، مربع طول أطول الأضلاع أكبر من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

$VIII$– المساحة *Area*

A : مساحة المربع تساوي مربع طول ضلعه.

مساحة المربع = s^2 حيث s طول الضلع.

B : مساحة المربع تساوي نصف مربع أحد قطريه .

مساحة المربع = $\frac{1}{2}d^2$ حيث d طول القطر.

C : مساحة المثلث القائم الزاوية تساوي نصف حاصل ضرب ضلعي القائمة .

مساحة المثلث القائم الزاوية = $\frac{1}{2}\left(l_1 \cdot l_2\right)$ حيث l_1, l_2 طولا ضلعي القائمة.

D : إذا تطابقت قاعدتا مثلثين فإن النسبة بين مساحتيهما تساوي النسبة بين طولي ارتفاعيهما.

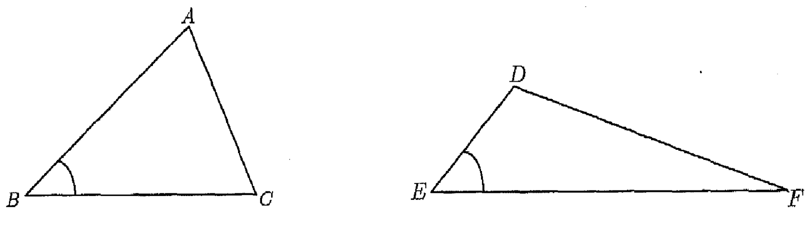
E : إذا تطابق ارتفاعا مثلثين فإن النسبة بين مساحتيهما تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما .

F : مساحة أي مثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2}\left(ab\right) \cdot sin\angle C$$

G : النسبة بين مساحتي مثلثين تتطابق فيهما زاويتان متناظرتان تساوي النسبة بين حاصل ضرب طولي ضلعي هاتين الزاويتين في كل مثلث. ففي $\Delta ABC, \Delta DEF$ (الشكل $1-19$)، وإذا رمزنا لمساحة المثلث ABC بالرمز $\left[ABC\right]$، فإن

$$\angle B \cong \angle E \Rightarrow \frac{\left[\Delta ABC\right]}{\left[\Delta DEF\right]} = \frac{\left(AB\right)\left(BC\right)}{\left(DE\right)\left(EF\right)}$$



شكل $1-19$

H : مساحة المثلث المتطابق الأضلاع تساوي $\frac{\sqrt{3}}{4}$مربع طول ضلع المثلث .

أي أن مساحة المثلث المتطابق الأضلاع = $\frac{s^2\sqrt{3}}{4}$ حيث s طول ضلع المثلث.

I : مساحة المثلث المتطابق الأضلاع تساوي $\frac{\sqrt{3}}{3}$مربع طول ارتفاع المثلث .

أي أن مساحة المثلث المتطابق الأضلاع = $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$ حيث h ارتفاع المثلث.

J : مساحة أي مثلث أطوال أضلاعه a, b, c تساوي $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

حيث $s = \frac{a+b+c}{2}$ (نصف طول محيط المثلث).

K : مساحة متوازي الأضلاع تساوي حاصل ضرب طول قاعدته في طول الارتفاع المقام عليها.

أي أن مساحة متوازي الأضلاع = $b \cdot h$

L : مساحة المعين تساوي نصف حاصل ضرب طولي قطريه ، أي أن مساحة المعين = $\frac{1}{2}\left(d_1 \cdot d_2\right)$.

M : مساحة شبه المنحرف تساوي حاصل ضرب نصف مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين في طول الارتفاع.

أي أن مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}h\left(b_1 + b_2\right)$ = القاعدة المتوسطة $\cdot\, h$

N : مساحة المضلع المنتظم تساوي حاصل ضرب نصف طول العامد (العمود المقام من مركز المضلع المنتظم إلى منتصف أحد أضلاع المضلع) في محيط المضلع المنتظم . مساحة المضلع المنتظم = $\frac{1}{2}a \cdot p$

O : مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطره r وقياس زاويته المركزية n = $\frac{n}{360} \cdot \pi r^2$.

P : النسبة بين مساحتي المثلثين المتشابهين تساوي مربع نسبة التشابه بينهما .

Q : نسبة التشابه بين أي زوج من المثلثات المتشابهة تساوي الجذر التربيعي للنسبة بين مساحتيهما .

R : النسبة بين مساحتي المضلعين المتشابهين تساوي مربع نسبة التشابه بينهما .

S : نسبة التشابه بين أي زوج من المضلعات المتشابهة تساوي الجذر التربيعي للنسبة بين مساحتيهما .

ملاحظة : نستطيع الحصول على نسبة التشابه عن طريق إيجاد النسبة بين أي زوج من الأضلاع المتناظرة، الارتفاعات، المتوسطات، منصفات الزوايا أو أي من القطع المستقيمة المتناظرة.

لنتعلم من المغالطات الهندسية

يقول جورج بوليا وهو يعد واحداً من أعظم الرياضيين المعاصرين : " الهندسة هي الاستنتاج الصحيح من الأشكال غير الصحيحة ". وسوف نوضح في هذا القسم أن تكوين نتائج مبنية على رسومات غير صحيحة يمكن أن يؤدي بنا إلى نتائج مستحيلة، بل إن العبارات التي تحوي مغالطات تبدو غريبة. ومع ذلك عليك أن تتتبع البرهان وتتعرف على الأخطاء.

والمغالطة الأولى هي واحدة من أشهر المغالطات في الهندسة وتستند على غياب مفهوم معين في كتاب العناصر لإقليدس .

المغالطة الأولى : أي مثلث مختلف الأضلاع هو مثلث متطابق الضلعين

الإثبات

لإثبات أن المثلث المختلف الأضلاع ABC هو مثلث متطابق الضلعين، نرسم منصفاً للزاوية C ، وكذلك نرسم منصفاً عمودياً للضلع $\overline{AB}$ ليتقاطعا في G ، والتي يخرج منها عمودان يقطعان $\overline{AC},\overline{CB}$ في D,F على الترتيب. لتكن E منتصف الضلع $\overline{AB}$.

عليك أن تلاحظ أن هناك أربع إمكانيات للوضع السابق يمثل الأنواع الممكنة من المثلثات المختلفة الأضلاع.

الشكل $1-20$: عندما $\overline{CG},\overline{EG}$ يتقاطعان داخل المثلث.

الشكل $1-21$: عندما $\overline{CG},\overline{EG}$ يتقاطعان على $\overline{AB}$.

الشكل $1-22$: عندما $\overline{CG},\overline{EG}$ يتقاطعان خارج المثلث، ولكن العمودين $\overline{GD},\overline{GF}$ يقعان على $\overline{AC},\overline{CB}$.

الشكل $1-23$: عندما $\overline{CG},\overline{EG}$ يتقاطعان خارج المثلث، ولكن العمودين $\overline{GD},\overline{GF}$ يقعان على $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$ خارج المثلث.

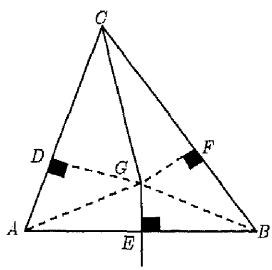
برهان هذه المغالطة يتحقق لأي شكل من الأشكال الأربعة ؛ ولذا اتبع البرهان على شكل واحد والباقي بالمثل.

المعطيات : ABC مثلث مختلف الأضلاع

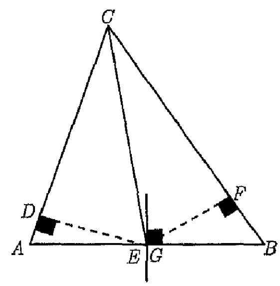
المطلوب : أثبت أن $AC = BC$ (أو ΔABC متطابق الضلعين)

البرهان : لأن $\angle ACG \cong \angle BCG$ ، والزاويتين $\angle CDG$, $\angle CFG$ قائمتان، فإن هذا يؤدي تطابق المثلثين $\Delta CDG,\Delta CFG$ (باستخدام زاويتين وضلع SAA) ومنه نستنتج أن $DG = FG, CD = CF$. الآن لدينا $AG = BG$ (لأن النقطة على المنصف العمودي للقطعة المستقيمة تبعد البعد نفسه عن طرفيها) ولدينا $\angle ADG,\angle BFG$

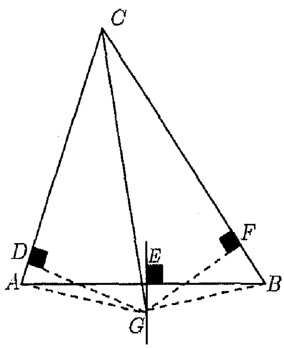
قائمتان ، وهذا يؤدي أيضاً إلى تطابق المثلثين $\Delta DAG, \Delta FBG$ (وتر وضلع قائمة) ومن ذلك نستنتج أن $DA = FB$ وهذا بالطبع يقودنا إلى أن $AC = BC$ (بالجمع في شكلي $1-20$ ، $1-21$ وبالطرح في $1-22$ ، $1-23$) ●



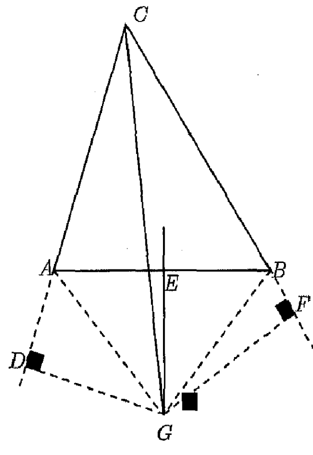
شكل $1-20$



شكل $1-21$



شكل $1-22$



شكل $1-23$

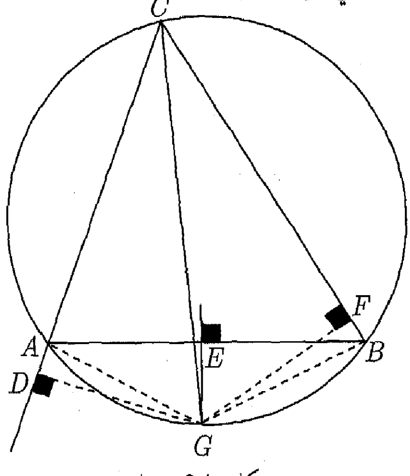
عند هذه النقطة قد تنزعج بعض الشيء، وتتساءل أين ارتكبنا الخطأ والذي سمح بهذه المغالطة، ولكنك بالإنشاء الدقيق سوف تجد الخطأ الماكر في الرسم، وتستنتج أن جميع الأشكال الأربعة المفترضة غير صحيحة.

a. إن النقطة G يجب أن تكون خارج المثلث.

b. عندما يلتقي العمودان مع ضلعي المثلث في D, F فإن إحدى هاتين النقطتين ستكون بين رأسين من رؤوس المثلث أما الثانية فستقع خارج المثلث.

وحسب القواعد العامة التي يستخدمها إقليدس، فإن هذه المعضلة لا تزال لغزا لأنه لم يقم بتعريف مفهوم البينية في كتابه العناصر. في المناقشة التالية، سوف نثبت أن هذا الخطأ ارتكب عند إثبات المغالطة السابقة، وبرهاننا سوف يستخدم الطرق الإقليدية ولكن مع فرض تعريف للبينية.

وسنبدأ بإنشاء دائرة محيطة بالمثلث ABC (انظر الشكل $24-1$). إن منصف $\angle ACB$ لابد أن يمر بمنتصف القوس AB (لأن $\angle ACG$ تطابق $\angle BCG$ - زاويتان محيطيتان متطابقتان)، ولنسم ذلك المنتصف G. أيضاً، المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ لابد أن يمر بمنتصف $\widehat{AB}$ ؛ وعليه لابد أن يمر بالنقطة G ، أي أن منصف $\angle ACB$ والمنصف العمودي للقطعة المستقيمة AB يتقاطعان خارج المثلث في G ، وهذا يلغي الإمكانيتين $20-1$ و $21-1$.



شكل $24-1$

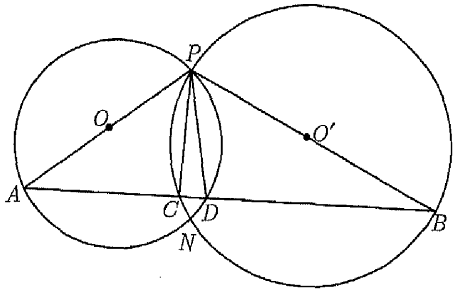
والآن لننظـــر للـــشكل الربـــاعي الـــدائري $ACBG$ الـــذي فيـــه $\angle CAG + \angle CBG = 180°$ ، نجد أنه في حالة $\angle CAG \equiv \angle CBG = 90°$ فإن القطعة المستقيمة CG تكون قطراً للدائرة وهذا يجعل المثلث ABC مثلثاً متطابق الضلعين ، ولكن ذلك مرفوض لأن المثلث ABC مختلف الأضلاع. إن هذا يعني أن $\angle CAG, \angle CBG$ ليستا قائمتين وأن إحداهما حادة والأخرى منفرجة .

وبفرض $\angle CBG$ حادة تكون $\angle CAG$ منفرجة، ومنه فإن ارتفاع المثلث CBG على الضلع CB يقع داخل المثلث، وفي المثلث المنفرج الزاوية CAG الارتفاع على الضلع AC يقع خارج المثلث. (هذا يقبل عادة بدون برهان ولكن من السهل إثباته). إن حقيقة أن واحداً وواحداً فقط من الارتفاعين يقطع ضلعاً من أضلاع المثلث بين رأسين فيه يدحض "إثبات" المغالطة.

المغالطة الثانية : يمكن رسم عمودين مختلفين على مستقيم واحد من نقطة خارجه.

الإثبات

لإثبات العبارة السابقة، نرسم دائرتين O, O' تتقاطعان في P, N (كما في الشكل $25 - 1$)، ثم نرسم القطرين $\overline{PA}, \overline{PB}$ في كل دائرة ، ثم نصل $\overline{AB}$ الذي يقطع الدائرة O في D ، والدائرة O' في C ، ومن هذا نجد أن $\angle PDA, \angle PCB$ قائمتان لأنهما منشأتان في نصفي الدائرتين O, O' على الترتيب، إذن $\overline{PC}, \overline{PD}$ عمودان على $\overline{AB}$.أي أنه يوجد خطان مستقيمان مختلفان عموديان على خط مستقيم ثالث مما يعني أن مجموع زوايا المثلث BCD أكبر من $180°$ - وهذه مزعجة جداً في هندسة إقليدس !●



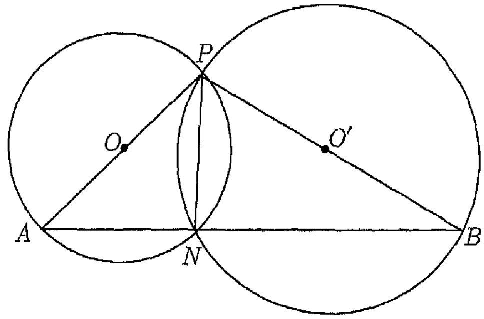
شكل $1-25$

والمغالطة هنا تظهر بفعل التقاطع الخاطئ للقطعة $\overline{AB}$ مع الدائرتين والتي من السهل إثبات أن $\overline{AB}$ تقطع الدائرتين عند النقطة N ، وذلك عن طريق رسم $\overline{AN}, \overline{BN}, \overline{PN}$ (انظر الشكل $1-26$) ، لأن $\angle ANP$ و $\angle BNP$ كل منهما منشأة في نصف دائرة ، إذن هما زاويتان قائمتان ، وكما تخبرنا مسلمة إقليدس الخامسة بأنه لا يمكن لنا سوى إنشاء عمود وحيد على مستقيم من نقطة تقع على هذا المستقيم.

ولذلك فالعمودان $\overline{AN}$ ، $\overline{BN}$ على $\overline{PN}$ يقطعانها في N ، وبالتالي هما قطعتان تقعان على مستقيم واحد $\overleftrightarrow{ANB}$. هذا يثبت أنه عندما نرسم $\overleftrightarrow{AB}$ للمرة الأولى يجب ألا يقطع الدائرتين في نقطتين C, D بل في نقطة واحدة N والتي هي نقطة تقاطع الدائرتين. ويتضح الآن أن " إثبات " المغالطة معتمد على فرض وجود النقطتين C, D.*

---

* لأولئك الذين يشعرون بالانزعاج حول دحض المغالطة مع الفرضية نفسها التي برهنت عليها (لا يمكن رسم مستقيمين مختلفين متعامدين على مستقيم ثالث) ، نستطيع استخدام مسلمة بليفير لإثبات أن كلاً من $\overline{AN}, \overline{BN}$ يوازي $\overline{OO'}$ ولذا يجب أن يكونا جزأين من $\overleftrightarrow{ANB}$.

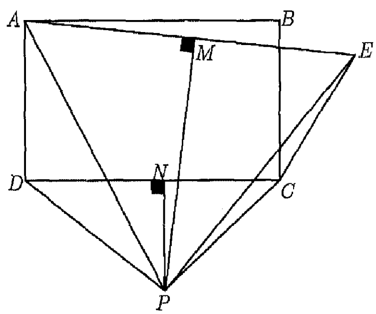


شكل $1-26$

المغالطة الثالثة : الزاوية القائمة لها نفس قياس الزاوية المنفرجة .

الإثبات

بداية إثباتنا سيكون برسم المستطيل $ABCD$ ، ثم نرسم $\overline{CE}$ خارجه بحيث $\overline{AD} \cong \overline{CE}$ ، ثم نرسم المتوسطين العموديين لكل من $\overline{AE}, \overline{CD}$ ، يقطعانهما في M, N على الترتيب ويتقاطعان في P ، وأخيراً نرسم $\overline{DP}, \overline{AP}, \overline{EP}, \overline{CP}$ كما في الشكل $1-27$.



شكل $1-27$

ولأن $AP = EP, DP = CP$ (كل نقطة تقع على المنصف العمودي لقطعة مستقيمة تبعد المسافة نفسها عن طرفي القطعة المستقيمة)، فإن $\triangle ADP \cong \triangle ECP$

ونستنتج من التطابق أن $m\angle ECP = m\angle ADP$. ولكن ΔPDC متطابق الضلعين مما يعني أن $m\angle DCP = m\angle CDP$. بالطرح نصل إلى أن الزاوية المنفرجة $\angle ECD$ تساوي الزاوية القائمة $\angle ADC$ ●

قد ترغب في دراسة الحالتين اللتين فيهما تقع النقطة P على $\overline{DC}$ أو داخل المستطيل $ABCD$ ، ولكن المناقشة السابقة تتحقق فيهما أيضا.

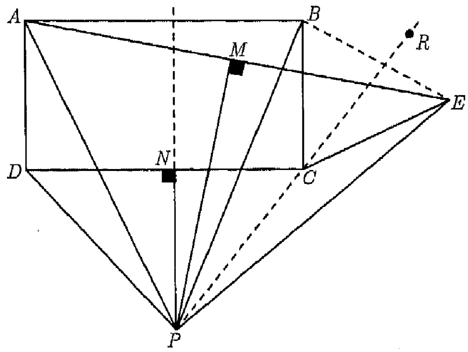
حتى الآن قد تجد أن أفضل طريقة للعثور على الخطأ في الإثبات السابق هو رسم هندسي دقيق، ولكن بدلاً من محاولة اكتشاف الخطأ عن طريق الرسم سوف نقوم بتحليل الوضع القائم.

سوف نلاحظ أن $\overleftrightarrow{NP}, \overleftrightarrow{MP}$ منصفان عموديان لكل من $\overline{AB}, \overline{AE}$ على الترتيب يتقاطعان في النقطة P التي هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABE ، وهذا يعني أن النقطة P تقع أيضاً على المنصف العمودي للضلع الثالث $\overline{BE}$ ، ومن المعطيات لدينا $BC = EC$ وبالتالي فالنقطة C يجب أن تقع أيضاً على المنصف العمودي للضلع الثالث $\overline{BE}$ (انظر الشكل $28-1$)، إن $\overleftrightarrow{PC}$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{BE}$ ، وكذلك المنصف الداخلي للزاوية $\angle BCE$. نعلم أن الزاوية المنعكسة هي الزاوية التي قياسها بين $180°$ و $360°$. وباعتبار الزاوية المنعكسة $\angle ECP$ التي قياسها يساوي $m\angle PCR + m\angle RCE$ ، نجد أن $\overline{EP}$ ضلع في ΔECP يقع مقابل النقطة C خارج المستطيل.

وهذا يجعل الخطوة الأخيرة في "برهان" المغالطة غير صحيح ؛ لأن

$$m\angle ECP \neq m\angle ECD + m\angle DCP$$

وينبغي أن نضع في اعتبارنا أن إقليدس لم يستخدم مصطلحات (داخل وخارج) في براهينه. و إنما كان يستخدمها فقط للإشارة إلى أشكال محددة. ونحن عموماً قادرون على مناقشة هذه المغالطة باستخدام تلك المصطلحات.

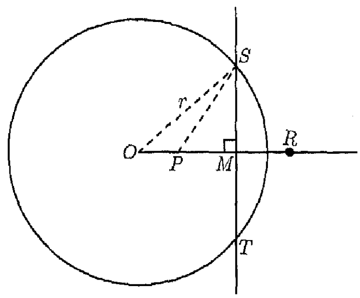


شكل 28 − 1

المغالطة الرابعة : أي نقطة داخل الدائرة تكون على الدائرة.

الإثبات

لتكن النقطة P تقع داخل الدائرة O ، واخترنا النقطة R واقعة على $\overline{OP}$ ، بحيث $(OP)(OR)=r^2$ حيث r طول نصف قطر الدائرة O. ولنفرض أن $\overleftrightarrow{ST}$ هو المنصف العمودي للقطعة $\overline{PR}$ والذي يقطع الدائرة في S,T ، حيث M منتصف $\overline{PR}$ (الشكل 29 − 1) .



شكل 29 − 1

لاحظ أن

$$OP = OM - MP \qquad (\text{I})$$

$$OR = OM + MR = OM + MP \qquad (\text{II})$$

بضرب $(\text{II}),(\text{I})$ نجد أن:

$$(OP)(OR) = (OM - MP)(OM + MP)$$ أو

$$(OP)(OR) = (OM)^2 - (MP)^2 \qquad (III)$$

وباستخدام نظرية فيثاغورس نجد:

$$(OM)^2 + (MS)^2 = (OS)^2$$ أو

$$(OM)^2 = (OS)^2 - (MS)^2 \qquad (\text{IV})$$

أيضا

أو $(MP)^2 + (MS)^2 = (PS)^2$

$$(MP)^2 = (PS)^2 - (MS)^2 \qquad (V)$$

والآن بالتعويض من $(V),(IV)$ في (III) نجد أن :

$$(OP)(OR) = [(OS)^2 - (MS)^2] - [(PS)^2 - (MS)^2] \qquad (III)$$

$$(OP)(OR) = (OS)^2 - (PS)^2 \qquad (VI)$$

ولأن $\overline{OS}$ نصف قطر الدائرة O ، لدينا :

$$(OS)^2 = r^2 = (OP)(OR) \qquad (VII)$$

و بالتعويض من (VII) في (VI) نحصل على :

$$(OP)(OR) = (OP)(OR) - (PS)^2 \qquad (VII)$$

وهذا يؤدي إلى أن $PS = 0$ ، والذي يقتضي بدوره أن النقطة P يجب أن تقع على محيط الدائرة .●

لاكتشاف المغالطة في البرهان السابق، نفرض أن $OP = a$ ومنها $OR = \dfrac{r^2}{a}$
ولأن $r > a$ ومربع العدد الحقيقي غير الصفري دائما موجب، إذن $(r-a)^2 > 0$ ، والتي يمكن صياغتها على الصورة $r^2 - 2ra + a^2 > 0$ ومنها $r^2 + a^2 > 2ra$ وبضرب المتباينة السابقة في $\dfrac{1}{2a}$ نحصل على $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r^2}{a} + a\right) > r$ والتي تكافئ

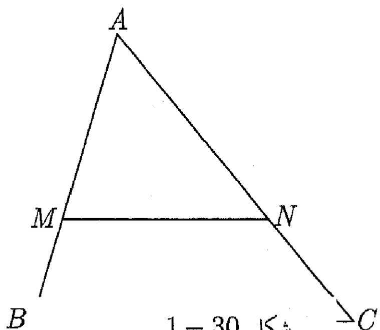
$\frac{1}{2}(OR+OP)>r$ أو $OM>r$ *. وهذا يتطلب أن تكون النقطة M خارج الدائرة، وعليه فإن النقطتين S,T ليس لهما وجود، وهذا ما يفند "البرهان" السابق.

المغالطة الخامسة : أي قطعتين مستقيمتين غير متساويتين هما في الحقيقة متساويتان .

الإثبات

في المثلث ABC لدينا $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ حيث $\overline{MN}$ تقطع $\overline{AB}, \overline{AC}$ في M, N على الترتيب (انظر شكل 30 – 1). والآن سنثبت أن $\overline{BC} = \overline{MN}$.

لأن $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$، فإن $\Delta AMN \sim \Delta ABC$. إذن $\frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MN}$، التي منها نستنتج أن $(BC)(AM)=(AB)(MN)$. بضرب طرفي المتساوية في $(BC-MN)$ نحصل على :



شكل 30 – 1

* $\frac{1}{2}(OR+OP)=\frac{1}{2}(OP+PR+OP)=\frac{1}{2}(2OP+2PM)=\frac{1}{2}(2OM)=OM>r$ (المترجم)

$$(BC)(AM)(BC-MN)=(AB)(MN)(BC-MN)$$

والتي يمكن صياغتها على الصورة :

$$(BC)^2(AM)-(BC)(MN)(AM)=(AB)(MN)(BC)-(AB)(MN)^2$$

بإضافة $(BC)(MN)(AM)-(AB)(MN)(BC)$ للطرفين نحصل على :

$$(BC)^2(AM)-(AB)(MN)(BC)=(BC)(MN)(AM)-(AB)(MN)^2$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$(BC)\left[(BC)(AM)-(AB)(MN)\right]=(MN)\left[(BC)(AM)-(AB)(MN)\right]$$

بالقسمة على العامل المشترك $(BC)(AM)-(AB)(MN)$ نحصل على

$BC = MN$ ●.

ما من مناقشة كاملة للمغالطات الرياضية دون أن يكون هناك مثال لمشكلة تنتج عن القسمة على صفر، ونحن اقترفنا هذا الخطأ الرياضي عندما قسمنا على صفر والذي كان على الصورة

$(BC)(AM)-(AB)(MN)$ ، حيث إنه نتيجة لتشابه المثلثين المذكورين آنفاً.*

التسميات الشائعة common nomenclature

الشكل 31 - 1 يوضح بعض التفاصيل والمسميات التي علينا أخذها في الاعتبار عند قراءتنا لهذا الكتاب، وقد وضعناها بشكل منهجي في قائمة، ولكننا

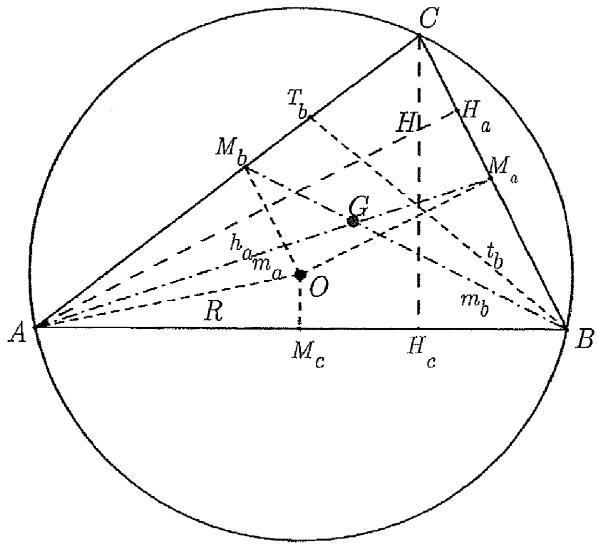
---

* من نتائج تشابه $\Delta AMN \sim \Delta ABC$ أن

$$\frac{BC}{MN}=\frac{AB}{AM}\Rightarrow (BC)(AM)=(AB)(MN)$$ (المترجم)

عندما نستخدم رمزاً غامضاً سوف نوضحه حتى لا يكون هناك التباس، وبالتالي قد نستخدم b للتعبير عن اسم ضلع مثلث أو قياسه، والذي سيوضح ذلك السياق ذاته. فالغموض ناتج من الخيارات المتعددة وليس من الجهل بالترميز، وهدفنا دائما سيكون الوضوح. وبغير شك، فإن الدقة والإحكام تدعم المادة المقدمة وبخاصة في المواضع الضبابية من مناقشاتنا.

a, b, c	*Sides*	الأضلاع
α, β, γ	*Angles*	الزوايا
A, B, C	*Vertices*	الرؤوس
h_a, h_b, h_c	*Altitudes*	الارتفاعات
H_a, H_b, H_c	*Feet of the altitudes*	مواقع الارتفاعات على الأضلاع المقابلة
H	*Orthocenter*	نقطة تقاطع الارتفاعات في المثلث
m_a, m_b, m_c	*Medians*	متوسطات المثلث
M_a, M_b, M_c	*Midpoints of sides*	منتصفات الأضلاع
G	*Centroid*	نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث
t_a, t_b, t_c	*Angle bisectors*	منصفات زوايا المثلث الداخلية
T_a, T_b, T_c	*Feet of Angle bisectors*	مواقع منصفات الزوايا على الأضلاع المقابلة
I	*Incenter*	نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلية ومركز الدائرة الداخلية للمثلث
r	*Inradius*	نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث
O	*Circumcenter*	نقطة تقاطع الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث ومركز الدائرة المحيطة للمثلث
R	*Circumradius*	نصف قطر الدائرة المحيطة للمثلث
$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$	*Semiperimeter*	نصف المحيط (نصف مجموع أطوال أضلاع المثلث)



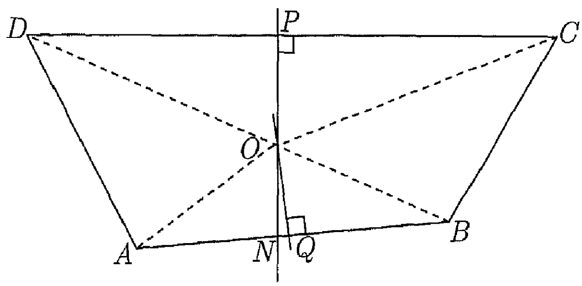
شكل $1-31$

تدريبات

1. اكتشف المغالطة في البرهان التالي : إذا تطابق ضلعان متقابلان في شكل رباعي فإن الضلعين الآخرين يتوازيان.

"البرهان"

في الشكل الرباعي $ABCD$ ، $AD = BC$ ، لتكن P, Q منتصفي $\overline{DC}, \overline{AB}$ على الترتيب. ارسم المنصفين العموديين $\overline{OP}, \overline{OQ}$ على الضلعين $\overline{DC}, \overline{AB}$ ليتقاطعا في O . لتكن N هي نقطة تقاطع $\overrightarrow{PO}$ مع $\overline{AB}$ (انظر الشكل $1-32$).



شكل $1-32$

لأن O تقع على المنصف العمودي للضلع $\overline{DC}$ ، فإن $\overline{DO} \cong \overline{CO}$ ، وبالمثل $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ ، ولدينا المعطى $AD = BC$ ، مما يؤدي إلى أن $\Delta ADO \cong \Delta BCO(SSS)$ ومن التطابق نستنتج أن $m\angle AOD = m\angle BOC$.

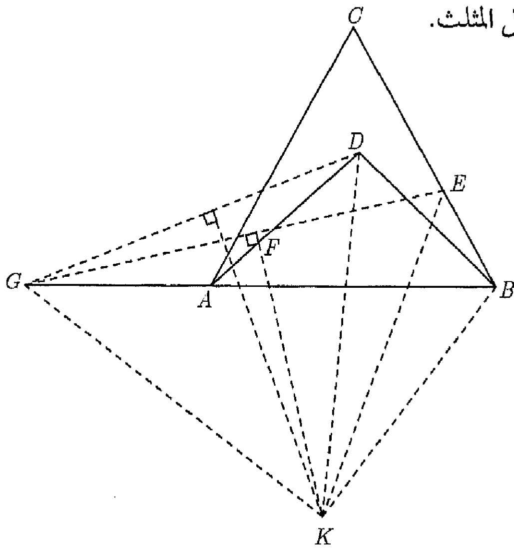
ويمكننا بسهولة إثبات أن $m\angle DOP = m\angle COP$ ، وبإضافة $m\angle AOD = m\angle BOC$ نحصل على $m\angle AOP = m\angle BOP$ ، وبما أن N تقع على $\overline{PO}$ ، إذن $m\angle AON = m\angle BON$ ، ولكن $\Delta AOQ \cong \Delta BOQ(SSS)$ ومن هذا التطابق نستنتج $m\angle AOQ = m\angle BOQ$ ، ولأنه لا يوجد سوى منصف واحد فقط للزاوية فإن $\overline{ON}, \overline{OQ}$ يجب أن ينطبق كل منهما على الآخر (N تنطبق على Q) مما يؤدي إلى أن $\overrightarrow{PN}$ عمودي على $\overline{AB}$ ، وهذا يعني أن : $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ●

كرر البرهان إذا كانت O خارج الشكل الرباعي، ثم كرر البرهان عندما O تقع على $\overline{DC}$.

2. اكتشف المغالطة في البرهان التالي : $45° = 60°$.

"البرهان"

لننشئ المثلث المتطابق الأضلاع ABC (انظر الشكل $33-1$)، ثم ننشئ المثلث القائم والمتطابق الضلعين ABD على الضلع $\overline{AB}$ بحيث يكون $\overline{AB}$ وتراً لهذا المثلث و D داخل المثلث.



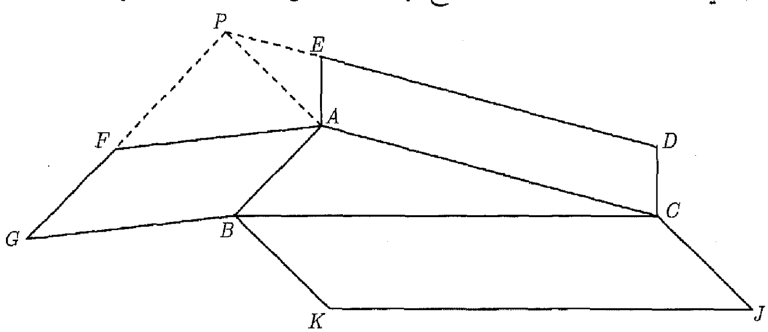
شكل $33-1$

لتكن E نقطة تقع على $\overline{BC}$ بحيث $\overline{BE}=\overline{BD}$. نصل النقطة E بنقطة منتصف $\overline{AD}$ ولتكن F ، ثم نمد EF ليقطع $\overline{BA}$ في G. نرسم $\overline{GD}$ ، وننشئ العمود المنصف لكل من $\overline{GD},\overline{GE}$. ولأن $\overline{GD},\overline{GE}$ غير متوازيين فإن منصفيهما العموديين يلتقيان في نقطة ولتكن K. نصل K بكل من G,D,E,B. ولأن $GK=KD,GK=KE$ (النقطة التي تقع على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون على أبعاد متساوية من نهايتي هذه القطعة) نستنتج أن $KD=KE$ ، ولكن من الإنشاء الأول $\overline{BE}=\overline{BD}$ ، وهذا يجعل $\Delta KBD\cong\Delta KBE\,(SSS)$. ومن

هـــذا التطـــابق نـــستنتج $m\angle KBD = m\angle KBE$. بـــالطرح نحـــصل على $m\angle DBG = m\angle EBG$ ، ولكن $m\angle DBG = 45°$ ، $m\angle CBG = 60°$ ، أي أن $60° = 45°$. ●

3. على الضلعين $\overline{AB}, \overline{AC}$ في المثلث الاختياري ABC ، أنشأنا متوازيي الأضلاع $ABGF, ACDE$ ، $\overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{GF}$ يتقاطعان في P. كما أنشأنا على الضلع $\overline{BC}$ متوازي الأضلاع $BCJK$ بحيث $\overline{BK} \cong \overline{PA}, \overline{BK} \parallel \overline{PA}$. (انظر الشكل 34 – 1).

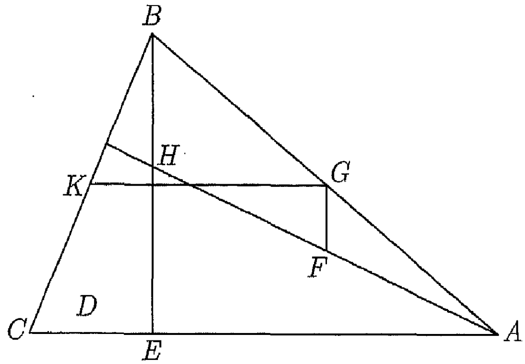
من هذا التكوين قدم بابوس (٣٠٠ بعد الميلاد) مقترحه لتوسعة نظرية فيثاغورس ، وقد أثبت أن مجموع مساحتي متوازيي الأضلاع $ABGF, ACDE$ تساوي مساحة متوازي الأضلاع $BCJK$. أثبت هذه العلاقة حيث المثلث ABC اختياري (ملاحظة : قد ترغب تتبع برهان إقليدس لنظرية فيثاغورس).



شكل 34 – 1

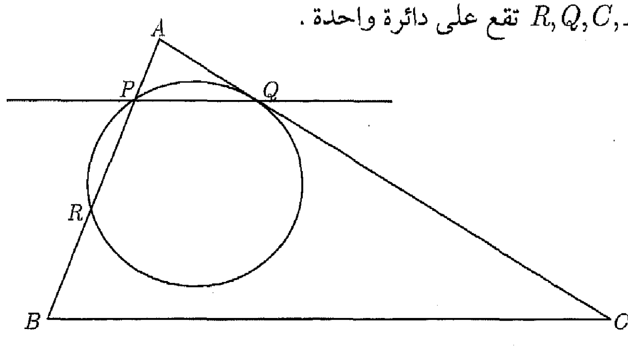
4. لدينا الارتفاعان $\overline{BE}, \overline{AD}$ في المثلث ABC يتقاطعان في H. فإذا كانت النقاط F, G, K منتصفات كل من $\overline{AH}, \overline{AB}, \overline{BC}$ على الترتيب (انظر الشكل 35 – 1).

أثبت أن $\angle FGK$ زاوية قائمة.



شكل 1-35

5. الخط المستقيم $\overleftrightarrow{PQ}$ يوازي $\overline{BC}$ حيث $\overline{BC}$ قاعدة المثلث ABC ويقطع كلاً من $\overline{AB}, \overline{AC}$ في P, Q على الترتيب (انظر الشكل 36 − 1) ، الدائرة التي تمر بالنقطة P وتمس $\overline{AC}$ عند Q تقطع $\overline{AB}$مرة أخرى في R. أثبت أن النقاط R, Q, C, B تقع على دائرة واحدة .



شكل 36 − 1

أثناء متابعة ما تبقى من هذا الكتاب ، قد ترغب في العمل على بعض التدريبات الإضافية.

لهذا الغرض حاول أن تستخدم كتاب :

"Challenging Problems in Geometry "

للمؤلفين

A. S.Posamentier and C. T. Salkind
(New York: Dover, 1996)

الفصل الثاني

تلاقي المستقيمات في مثلث

مقدمة

على الرغم من أهمية مفهوم التقاطع في نقطة (أي تقاطع ثلاثة أو أكثر من المستقيمات في نقطة واحدة)، فإن هذا الموضوع لا يأخذ حقه في منهج الهندسة الأساسي ؛ وذلك بسبب وجود مفاهيم أخرى ذات أولوية. ولعل الحصول على نتائج سهلة وجميلة حول هذا المفهوم يتطلب المزيد من النظريات التي لا يسمح بها الوقت - عادة - في برنامج الهندسة الدراسي الأولي.

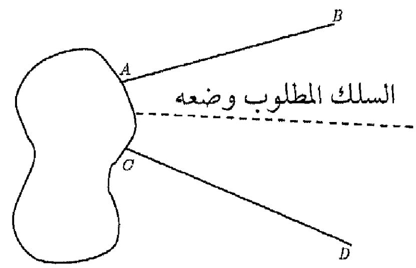
الحالات المألوفة للتقاطع في نقطة مثل المتوسطات، منصفات الزوايا، والارتفاعات في المثلث، تم ذكرها سابقاً. ولكن لم يتم إثباتها في كثير من الأحيان. وإدخال نظريات جديدة قليلة يجعل موضوع التقاطع في نقطة سهلاً جداً، ويفتح أفقاً جديداً في الهندسة الإقليدية.

هذا الفصل يبدأ ببرهان أهمية وضع التقاطع في نقطة، وذلك بمساعدة نظرية مهمة، قدمها جيوفاني شيفا Giovanni Ceva في عام ١٦٧٨ م، وكذلك سنقدم مجموعة متنوعة من العلاقات الشيقة والنظريات، وسترى لاحقاً كيف نوضح ببساطة إثبات بعض النظريات الصعبة السابقة.

ولأننا نريد أن نوضح أهمية التقاطع في نقطة ، دعونا ندرس المثال التالي

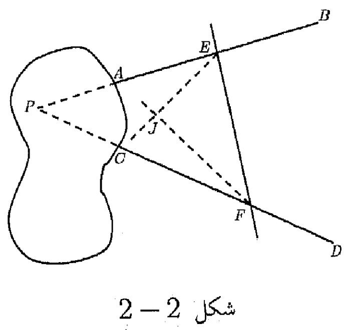
مثال : تم وضع اثنين من الأسلاك المستقيمة داخل منطقة ، فالتقيا في نقطة يصعب الوصول إليها (انظر الشكل $1-2$).

كيف يمكنك تحديد موقع مناسب لوضع سلك ينصف الزاوية التي شكلها السلكان دون لمس هذه المنطقة؟



شكل $1-2$

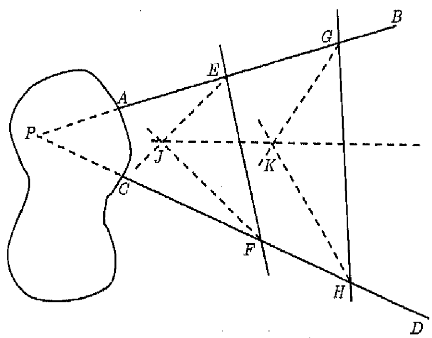
على الرغم من أن هناك طرقاً كثيرة ممكنة لحل هذه المشكلة ، إلا أننا اخترنا الحل التالي للسبب الذي سيتضح لاحقاً.



شكل $2-2$

الحل

لنرسم خطاً مستقيماً يقطع كلاً من $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{CD}$ في E,F على الترتيب (انظر الشكل $2-2$)، وكذلك ننشئ منصفي الزاويتين $\angle AEF,\angle CFE$ ليتقاطعا في J. لنفرض اكتمال المثلث PEF. وعليه، فمنصف الزاوية $\angle P$ يمر بالنقطة J (لأن منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة). لنكرر هذه العملية مع مستقيم ثان وليكن $\overleftrightarrow{GH}$ والذي يقطع $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{CD}$ في G,H على الترتيب (انظر الشكل $2-3$). وبالمثل ننصف الزاويتين $\angle AGH,\angle CHG$ بمنصفين يتقاطعان في K ، ومرة أخرى يجب أن تقع النقطة K على منصف الزاوية $\angle P$ ، أي أن منصف الزاوية $\angle P$ تقع عليه النقطتان J,K. وهذا يعني أن النقطتين J,K تحددان موضع الخط المستقيم المطلوب، الذي هو موضع السلك الذي يجب تثبيته.●



شكل $2-3$

هذا الحل يعتمد على فكرة أن منصفات الزوايا في المثلث تتقاطع في نقطة واحدة. وكما أشرنا، فإن موضوع التقاطع في نقطة في المثلث يستحق اهتماماً أكبر في مقرر الهندسة الأساسي الدراسي.

بطريقة سهلة للغاية، سوف نبرهن أن منصفات زوايا المثلث الداخلية تتقاطع في نقطة واحدة، ولكن أولاً يجب أن نؤسس بعض العلاقات المهمة، وعلينا أن نتذكر الأساسيات الهندسية التي تخبرنا أن للمثلث العديد من المراكز والتي منها على سبيل المثال.

- نقطة تقاطع المتوسطات Centroid – مركز ثقل المثلث.
- نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث Orthocenter.
- مركز الدائرة الداخلية للمثلث Incenter. ويتم تعيينه من تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلية .
- مركز الدائرة المحيطة بالمثلث Circumcenter – ويتم تعيينه من تقاطع المنصفات العمودية لأضلاع المثلث .

تطبيقات عديدة على مراكز المثلث يتم دراستها في مقرر الهندسة الأساسي ، ويعتمد عليها الطلاب في كثير من الأحيان في التطبيقات العملية التي تعتمد على خاصية التقاطع في نقطة والتي تنتج من النقاط (المراكز) السابقة. سنقدم أحد هذه التطبيقات في بداية هذا الفصل.

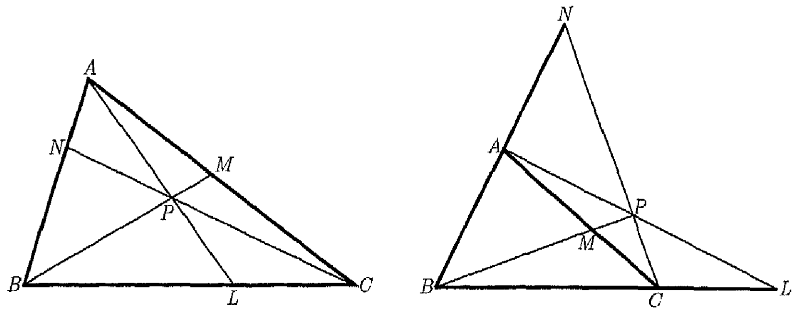
ولأن البراهين التقليدية مرهقة بعض الشيء ، فإن كثيراً من هذه العلاقات تكون مقبولة بدون برهان. بمساعدة نظرية مشهورة قدمها الرياضي الإيطالي جيوفاني شيفا Giovanni Ceva (١٦٤٧– ١٧٣٤م) والتي تحمل اسمه ، سنستنتج براهين لعلاقات التقاطع في نقطة التي سبق الحديث عنها بالإضافة إلى علاقات عديدة أخرى.

نظرية شيفا Ceva's Theorem

نظرية 2-1

الخطوط المستقيمة الثلاثة المارة برؤوس المثلث ABC لتقطع الأضلاع المقابلة في النقاط L,M,N على الترتيب تتقاطع في نقطة واحدة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$



شكل 4 − 2

لإثبات هذه النظرية ، علينا أن نلاحظ أولاً أن هناك حالتين ممكنتين لتقاطع ثلاثة خطوط مستقيمة تخرج من رؤوس مثلث إلى الأضلاع المقابلة من مثلث (كما بالشكل 4 − 2). ربما من الأسهل متابعة البرهان مع الرسم الأيسر والتحقق من الخطوات من الرسم على الجهة اليمنى ، وعلى أي حال فإن البرهان التالي يتحقق مع كلا الشكلين. ويحتاج إثبات نظرية شيفا إلى برهانين (أحدهما معكوس للآخر) لأنها علاقة تكافؤ (إذا وفقط إذا)، وسنثبت أولاً أنه إذا مرت ثلاثة مستقيمات برؤوس المثلث ABC وقطعت أضلاع المثلث المقابلة في النقاط L,M,N والتقت في نقطة واحدة، فإن $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$ ، وسنقدم ثلاثة براهين لإثبات ذلك. الأول منها على الرغم أنه ليس أبسطها إلا أنه لا يحتاج أي إنشاء هندسي.

البرهان I

على الشكل $(4-2)$ ، $\overline{AL},\overline{BM},\overline{CN}$ تتقاطع جميعاً في النقطة P، ولأن المثلثين ABL,SCL لهما نفس الارتفاع (الخارج من الرأس A) فإن

$$\frac{[\Delta ABL]}{[\Delta ACL]} = \frac{BL}{LC} \qquad (I)$$

(رمزنا لمساحة المثلث ABC بالرمز $[\Delta ABC]$). بالمثل

$$\frac{[\Delta PBL]}{[\Delta PCL]} = \frac{BL}{LC} \qquad (II)$$

من $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$

$$\frac{[\Delta PBL]}{[\Delta PCL]} = \frac{[\Delta ABL]}{[\Delta ACL]}$$

بتطبيق خاصية التناسب التالية $\left(\frac{w}{x} = \frac{y}{z} = \frac{w-y}{x-z}\right)$ ، نحصل على

$$\frac{BL}{LC} = \frac{[\Delta ABL]}{[\Delta ACL]} = \frac{[\Delta PBL]}{[\Delta PCL]} == \frac{[\Delta ABP]}{[\Delta ACP]} \qquad (III)$$

وبتكرار العملية السابقة على $\overline{BM}$ بدلاً من $\overline{AL}$ نحصل على

$$\frac{CM}{MA} = \frac{[\Delta BMC]}{[\Delta BMA]} = \frac{[\Delta PMC]}{[\Delta PMA]}$$

ومنها

$$\frac{CM}{MA} = \frac{[\Delta BMC]-[\Delta PMC]}{[\Delta BMA]-[\Delta PMA]} = \frac{[\Delta BCP]}{[\Delta BAP]} \qquad (IV)$$

مرة أخرى ، نكرر نفس العملية على $\overline{CN}$ بدلاً من $\overline{AL}$ لنجد أن

$$\frac{AN}{NB} = \frac{[\Delta ACN]}{[\Delta BCN]} = \frac{[\Delta APN]}{[\Delta BPN]}$$

ومنها

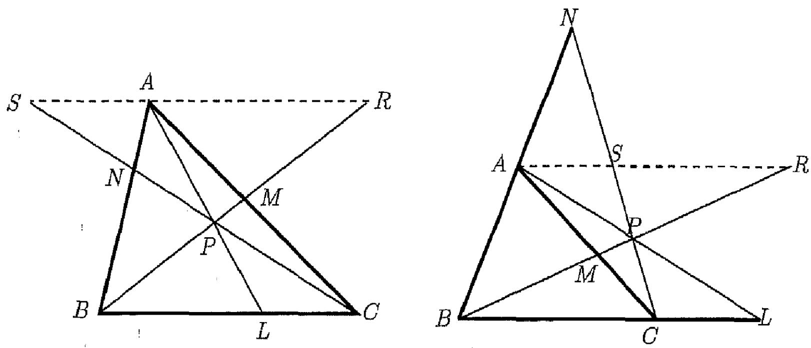
$$\frac{AN}{NB}=\frac{[\Delta ACN]-[\Delta APN]}{[\Delta BCN]-[\Delta BPN]}=\frac{[\Delta ACP]}{[\Delta BCP]} \qquad (V)$$

بضرب $(\mathrm{V}),(\mathrm{IV}),(\mathrm{III})$ نحصل على المطلوب :

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{[\Delta ABP]}{[\Delta ACP]}\cdot\frac{[\Delta BCP]}{[\Delta BAP]}\cdot\frac{[\Delta ACP]}{[\Delta BCP]}=1$$

.●

البرهان *II*



شكل $2-5$

بالعمل على الشكل $2-4$ وإضافة $\overleftrightarrow{SR}$ والذي يمر بالنقطة A ويوازي $\overline{BC}$ ويقطع $\overleftrightarrow{BM},\overleftrightarrow{CN}$ في R,S على الترتيب، (انظر الشكل $2-5$).

الخطوط المتوازية تمكننا من وضع الأزواج التالية من المثلثات المتشابهة.

$$\Delta AMR \sim \Delta CMB \Rightarrow \frac{AM}{MC}=\frac{AR}{CB} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\Delta BNC \sim \Delta ANS \Rightarrow \frac{BN}{AN} = \frac{CB}{SA} \qquad \text{(II)}$$

$$\Delta CLP \sim \Delta SAP \Rightarrow \frac{CL}{SA} = \frac{LP}{AP} \qquad \text{(III)}$$

$$\Delta BLP \sim \Delta RAP \Rightarrow \frac{BL}{RA} = \frac{LP}{AP} \qquad \text{(IV)}$$

من $(\text{IV}),(\text{III})$ نحصل على $\frac{CL}{SA} = \frac{BL}{RA}$ ، والتي يمكن صياغتها كالتالي :

$$\frac{CL}{BL} = \frac{SA}{RA} \qquad \text{(V)}$$

بضرب $(\text{V}),(\text{II}),(\text{I})$ نحصل على :

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

●

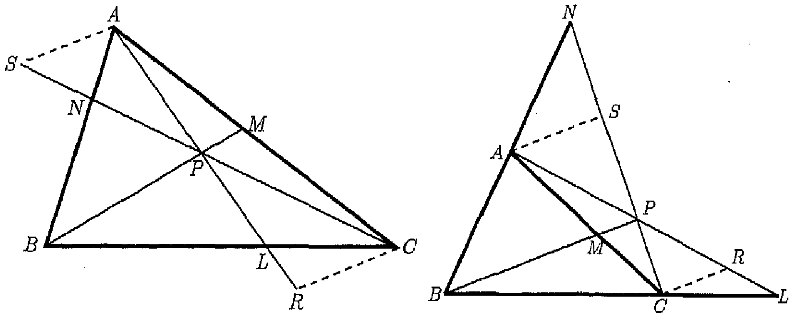
(نفس الاستنتاج الذي وصلنا إليه في البرهان الأول)

البرهان *III*

بالعمل مرة أخرى على الشكل 4 – 2 وإضافة خطين مستقيمين لكل رسم من الرأسين A,C يوازيان $\overline{BP}$ ، ويقطعان $\overleftrightarrow{CP},\overleftrightarrow{AP}$ في S,R على الترتيب، (انظر الشكل 6 – 2).

$$\Delta ASN \sim \Delta BPN \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{AS}{BP} \qquad \text{(I)}$$

$$\Delta BPL \sim \Delta CRL \Rightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{BP}{CR} \qquad \text{(II)}$$



شكل $2-6$

$$\Delta PAM \sim \Delta RAC \Rightarrow \frac{CA}{MA} = \frac{RC}{PM}$$

ويمكننا صياغة العلاقة السابقة على الصورة :

$$CA = \frac{(RC)(MA)}{PM} \qquad (\text{III})$$

$$\Delta PCM \sim \Delta SCA \Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{PM}{AS}$$

كما يمكننا صياغة العلاقة الأخيرة على الصورة :

$$CA = \frac{(AS)(CM)}{PM} \qquad (\text{IV})$$

من $(\text{IV}),(\text{III})$ ، نحصل على :

$$\frac{(RC)(MA)}{PM} = \frac{(AS)(CM)}{PM}$$

وأخيراً يمكننا كتابة العلاقة

السابقة بعد تبسيطها على الصورة :

$$\frac{CM}{MA}=\frac{RC}{AS} \qquad (\mathrm{V})$$

بضرب $(\mathrm{V}),(\mathrm{II}),(\mathrm{I})$ نحصل على :

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=\frac{AS}{BP}\cdot\frac{BP}{CR}\cdot\frac{RC}{AS}=1$$ ●

لإكمال برهان نظرية شيفا علينا أن نثبت عكس ما أثبتناه سابقاً، أي سنثبت الآن أنه إذا كانت الخطوط المستقيمة الخارجة من رؤوس المثلث ABC نحو أضلاعه المقابلة والتي تقطعها في L,M,N على الترتيب تحقق العلاقة $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$ ، فإن الخطوط المستقيمة الثلاثة تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة.

البرهان

نفرض أن $\overleftrightarrow{BM},\overleftrightarrow{AL}$ يتقاطعان في النقطة P ، ونرسم $\overleftrightarrow{PC}$ والذي يتقاطع مع $\overleftrightarrow{AB}$ في N'. الآن

كل من $\overleftrightarrow{AL},\overleftrightarrow{BM},\overleftrightarrow{CN'}$ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة. وعليه، يمكننا استخدام الجزء الذي أثبتناه في نظرية شيفا سابقاً للوصول إلى أن

$$\frac{AN'}{N'B}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

ولكن من المعطى لدينا

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

إذن $\frac{AN}{NB}=\frac{AN'}{N'B}$. أي أن النقطة N تنطبق على النقطة N' ، وهذا يثبت المطلوب. ●

تطبيقات على نظرية شيفا

إن من أفضل الوسائل التي تكشف لنا مدى الاستفادة من نظرية شيفا هي برهنة مشكلة تقاطع القطع المستقيمة المختلفة والتي تواجهنا في الهندسة الأولية . وأبسط هذه التطبيقات هو إثبات تقاطع متوسطات المثلث في نقطة واحدة. ولعل أفضل تقدير لقوة نظرية شيفا هو أن تثبت أن متوسطات المثلث تتقاطع في نقطة واحدة بالطريقة التقليدية وسيكفي أن تقول عند ذلك أنه إثبات طويل جدا ومعقد. وبالمقارنة مع هذا الإثبات المرهق ، فإن الطريقة التي نستخدمها هنا ينبغي أن تثير بعض التشويق حول نظرية شيفا.

تطبيق 1

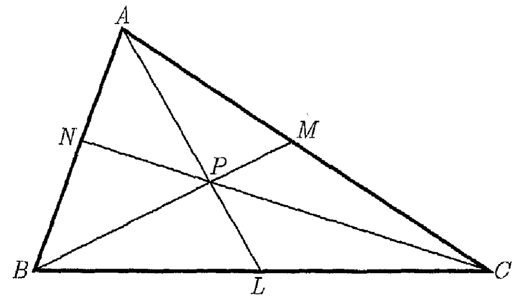
أثبت أن متوسطات المثلث جميعاً تتقاطع في نقطة واحدة.

البرهان

القطع المستقيمة $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ متوسطات في ΔABC (انظر الشكل 7 – 2)، ولذا $AN = NB$ ، $BL = LC, CM = MA$. بالضرب نحصل على :

$$(AN)(BL)(CM) = (NB)(LC)(MA) \Rightarrow \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

إذن من نظرية شيفا $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة. ●



شكل $2-7$

تطبيق 2

أثبت أن ارتفاعات المثلث جميعاً تتقاطع في نقطة واحدة.

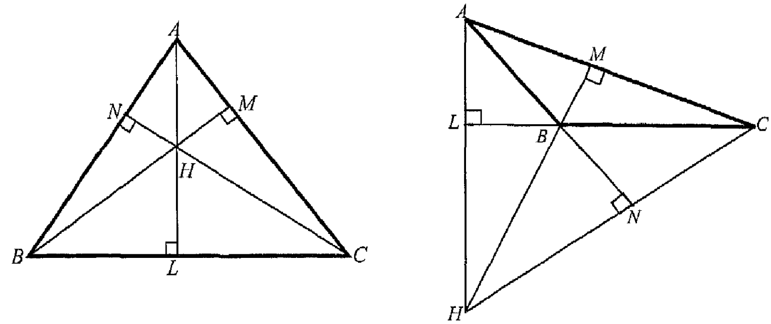
البرهان

في ΔABC ، $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ ارتفاعات، يمكن تتبع البرهان التالي في الرسمين الموضحين في الشكل $2-8$ لأن الإثبات يتحقق للمثلث الحاد الزوايا والمثلث المنفرج الزاوية على السواء .

$$\Delta ANC \sim \Delta AMB \Rightarrow \frac{AN}{MA} = \frac{AC}{AB} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\Delta BLA \sim \Delta BNC \Rightarrow \frac{BL}{NB} = \frac{AB}{BC} \qquad (\mathrm{II})$$

$$\Delta CMB \sim \Delta CLA \Rightarrow \frac{CM}{LC} = \frac{BC}{AC} \qquad (\mathrm{III})$$



شكل 8 – 2

بضرب (III),(II),(I) نحصل على :

$$\frac{AN}{MA}\cdot\frac{BL}{NB}\cdot\frac{CM}{LC}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}=1$$

إذن من نظرية شيفا ، ارتفاعات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة●.

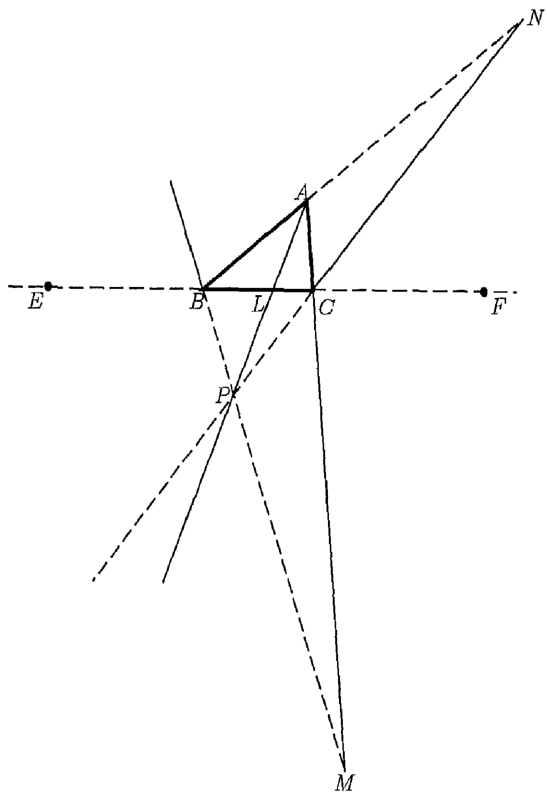
إثبات أن منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة تم تركه كتمرين ، والبرهان التالي سيساعدك في حله.

تطبيق 3

أثبت أن المنصف الداخلي لأي زاوية في مثلث غير متطابق الضلعين يتقاطع في نقطة واحدة مع المنصفين الخارجيين للزاويتين الأخريين .

البرهان

في ΔABC ، $\overleftrightarrow{AL}$ ينصف $\angle BAC$ ويقطع $\overleftrightarrow{BC}$ في L ، $\overleftrightarrow{BM}$ منصف خارجي للزاوية $\angle ABE$ ويقطع $\overleftrightarrow{AC}$ في M ، $\overleftrightarrow{CN}$ منصف خارجي للزاوية $\angle ACF$ ويقطع $\overleftrightarrow{AB}$ في N (انظر الشكل 9 – 2).



شكل $9-2$

لأن منصف الزاوية الداخلية في المثلث $\overleftrightarrow{AL}$ يقسم الضلع المقابل إلى جزأين متناسبين مع الضلعين الباقيين في المثلث أي أن :

$$\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC} \qquad (\mathrm{I})$$

المنصف الخارجي أيضاً يقسم الضلع الذي يقطعه إلى جزأين متناسبين مع الضلعين الباقيين في المثلث، وهذه الخاصية تعطينا التناسبين التاليين :

للمنصف $\overleftrightarrow{BM}$:

$$\frac{CM}{MA}=\frac{BC}{AB} \qquad (\mathrm{II})$$

للمنصف $\overleftrightarrow{CN}$:

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AC}{BC} \qquad (\mathrm{III})$$

بضرب $(\mathrm{III}),(\mathrm{II}),(\mathrm{I})$ نحصل على :

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1$$

من نظرية شيفا نستطيع استنتاج أن $\overleftrightarrow{AL},\overleftrightarrow{BM},\overleftrightarrow{CN}$ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة. ●

في بعض الأحيان، قد يأتي سؤال التقاطع في نقطة بصورة غير مباشرة، كما في التطبيق التالي.

تطبيق 4

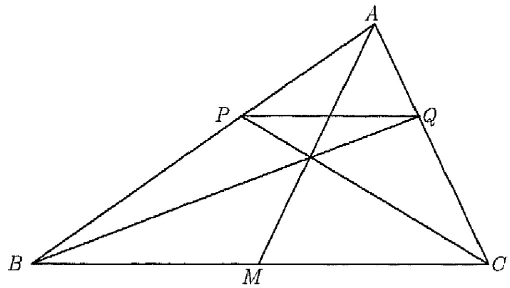
في ΔABC ، $\overline{PQ}\,//\,\overline{BC}$ ويقطع $\overline{AB},\overline{AC}$ في P,Q على الترتيب (انظر الشكل $10-2$). أثبت أن $\overline{PC},\overline{QB}$ يتقاطعان في نقطة تقع على المتوسط $\overline{AM}$.

البرهان

لأن $\overline{PQ}\,//\,\overline{BC}$ ، فلدينا :

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{QC}{AQ} = 1 \qquad (I)$$

ولأن $\overline{AM}$ متوسط في المثلث ، إذن $BM = MC$ أو



شكل 10 $-$ 2

$$\frac{BM}{MC} = 1 \qquad (\mathrm{II})$$

فبضرب (I) و (II) نحصل على :

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{QC}{AQ} \cdot \frac{BM}{MC} = 1$$

إذن ، من نظرية شيفا $\overline{AM}, \overline{QB}, \overline{PC}$ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة ، أو $\overline{PC}, \overline{QB}$ يتقاطعان في نقطة تقع على المتوسط $\overline{AM}$. ●

حتى هذه اللحظة فإن جميع التطبيقات السابقة احتاجت أن نثبت التقاطع في نقطة ، ولكن التطبيق التالي سيوضح استخداماً مختلفاً لنظرية شيفا.

تطبيق 5

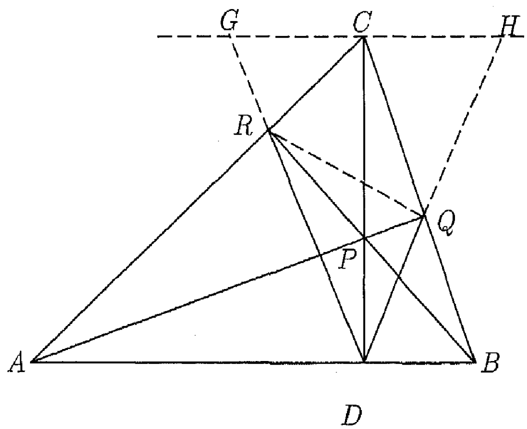
في ΔABC ، $\overline{CD}$ ارتفاع على $\overline{AB}$. P أي نقطة تقع على $\overline{DC}$. $\overrightarrow{AP}$ تقطع $\overline{BC}$ في Q ، $\overrightarrow{BP}$ تقطع $\overline{AC}$ في R (انظر الشكل 11 – 2) . أثبت أن $\angle RDC \cong \angle QDC$.

البرهان

نرسم $\overrightarrow{DR}, \overrightarrow{DQ}$ يقطعان الخط المستقيم المار بالنقطة C والموازي للضلع $\overline{AB}$ في G, H على الترتيب لنجد أن

$$\Delta CGR \sim \Delta ADR \Rightarrow \frac{CR}{RA} = \frac{GC}{AD} \qquad \text{(I)}$$

$$\Delta BDQ \sim \Delta CHQ \Rightarrow \frac{BQ}{QC} = \frac{DB}{CH} \qquad \text{(II)}$$



شكل 11 – 2

والآن سنطبق نظرية شيفا على ΔABC لنحصل على

$$\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BQ}{QC}=1 \qquad (\mathrm{III})$$

بالتعويض من $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$ في (III) :

$$\frac{GC}{AD}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{DB}{CH}=1 \Rightarrow \frac{GC}{CH}=1$$

أي أن $GC = CH$ ، إذن $\overline{CD}$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{GH}$ ، وعليه فإن $\Delta GCD \cong \Delta HCD$ ومنه فإن $\angle RDC \cong \angle QDC$. ●

لقد رأينا في التطبيقات السابقة كيف يسرت لنا نظرية شيفا إثبات النظريات التي كان إثباتها معقداً. ومرة أخرى، توضح لنا نظرية شيفا أهميتها في مساعدتنا في إثبات نقطة تقاطع أخرى شيقة في المثلث تسمى نقطة جيرجون Gergonne point

نقطة جيرجون Gergonne point

قدم الرياضي الفرنسي جوزيف – دياز جيرجون Joseph-Diaz Gergonne (١٧٧١ – ١٨٥٩م) نقطة تقاطع رائعة في المثلث. ويحتل جيرجون مكانة متميزة في تاريخ الرياضيات، وقد بدأت شهرته عام ١٨١٠ م عندما أسس مجلة الرياضيات البحتة والتي كانت تسمى "دوريات الرياضيات البحتة والتطبيقية" Annales des mathematiques pures et appliqués ، وكانت تصدر شهرياً حتى عام ١٨٣٢م، وعرفت باسم مجلة جيرجون. وأثناء صدور المجلة قدم جيرجون حوالي مائتي بحث ومقال وخاصة في الهندسة. وقد لعبت مجلة جيرجون دوراً مهماً في تأسيس الهندسة الإسقاطية والهندسة الجبرية، وأعطت الفرصة للعقول العظيمة في ذلك الوقت لتبادل المعلومات.

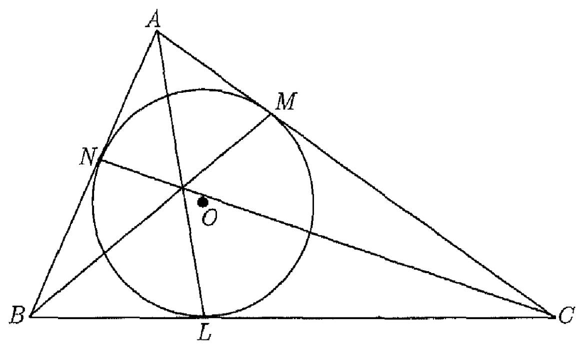
وسندرس هنا نظرية بسيطة نوعاً ما قدمها جيرجون حول التقاطع في نقطة، ومن السهل إثباتها بنظرية شيفا.

نظرية 2-2 الخطوط المستقيمة المارة برؤوس المثلث ونقاط تماس الدائرة الداخلية له الواقعة على أضلاع المثلث المقابلة لكل رأس تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة .(هذه النقطة يطلق عليها اسم **نقطة جيرجون** Gergonne point للمثلث).

البرهان

الدائرة O تمس أضلاع المثلث $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ في النقاط N,M,L على الترتيب (انظر الشكل $12-2$). ومن ذلك نستنتج المتساويات $AN=AM, BL=BN, CM=CL$ والتي يمكن صياغتها على الصورة:

$$\frac{AN}{AM}=1,\frac{BL}{BN}=1,\frac{CM}{CL}=1$$



شكل $12-2$

ويضرب النسب الثلاث السابقة ، نحصل على :

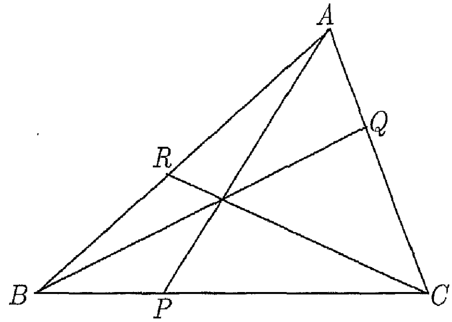
$$\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BL}{BN}\cdot\frac{CM}{CL}=1 \Leftrightarrow \frac{AN}{BN}\cdot\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CM}{AM}=1$$

من نظرية شيفا ، المتساوية السابقة تؤدي إلى أن $\overline{AL},\overline{BM},\overline{CN}$ تتقاطع في نقطة واحدة هي نقطة جيرجون للمثلث ABC . ●

تدريبات

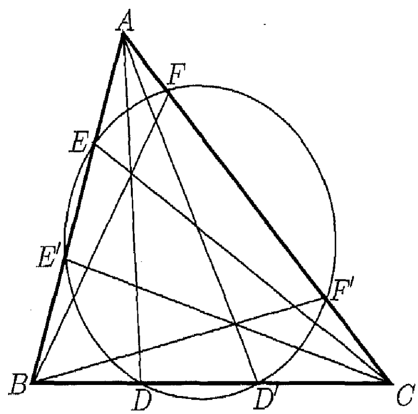
1. أثبت أن منصفات زوايا المثلث الداخلية تتقاطع في نقطة واحدة.
2. تقع النقطة P على الضلع $\overline{BC}$ بحيث $AB+BP=AC+CP$ ، وتقع النقطة Q على الضلع $\overline{AC}$ بحيث $BC+CQ=AB+AQ$ ، وكذلك تقع النقطة R على الضلع $\overline{AB}$ بحيث $AB+BP=AC+CP$. أثبت أن $\overline{AP},\overline{BQ},\overline{CR}$ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة. (انظر الشكل $2-13$). (تُعرف نقطة التقاطع هذه بنقطة ناجل * Nagel point للمثلث ABC).

* اكتشفها ناجل C. H.Nagel (١٨٠٣ – ١٨٨٢ م)، وهذه النقطة أيضاً يمكن وصفها على أنها نقطة تقاطع المستقيمات المارة برؤوس مثلث ونقاط تماس الدوائر الخارجية للمثلث الواقعة على الأضلاع المقابلة لها في المثلث (الدائرة الخارجية للمثلث هي الدائرة التي تمس أحد أضلاع المثلث من الخارج وتمس امتداد الضلعين الآخرين).



شكل $2-13$

3. علـــى الــشكل $(2-14)$ ، المثلـــث ABC يقطـــع الـــدائرة في النقـــاط E, E', D, D', F, F'. أثبــت أنــه إذا تقــاطع كــل مــن AD, BF, CE في نقطــة واحدة، فإن AD', BF', CE' تتقاطع هي الأخرى في نقطة واحدة.

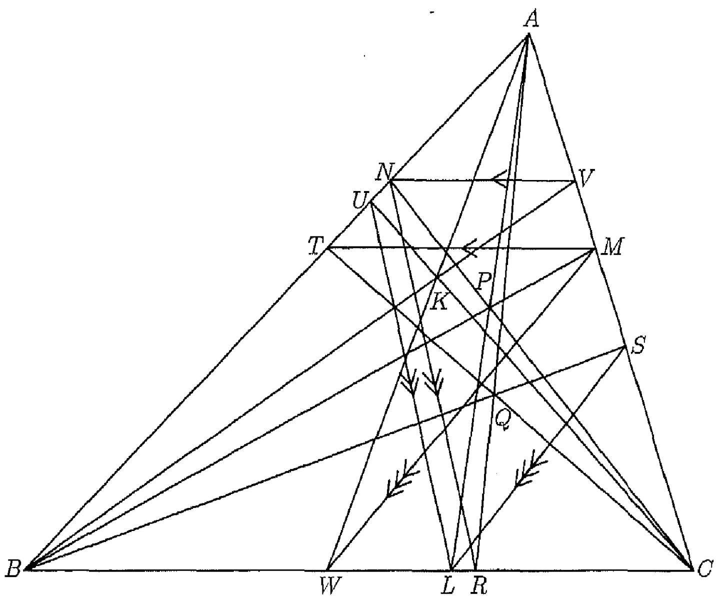


شكل $2-14$

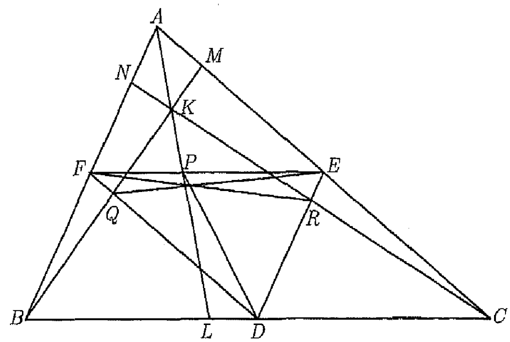
4. في المثلث ABC (الشكل $2-15$)، $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع في النقطة P. النقاط R, S, T تقع على $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ على الترتيب، بحيث $\overline{NR} \,//\, \overline{AC}$ ، $\overline{LS} \,//\, \overline{AB}$ ، $\overline{MT} \,//\, \overline{BC}$. أثبت أن $\overline{AR}, \overline{BS}, \overline{CT}$ تتقاطع في نقطة (عند النقطة Q).

5. في المثلث ABC (الشكل $2-15$) $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع في النقطة P . النقاط U, V, W تقع على $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب، بحيث $\overline{MW} \parallel \overline{AB}$ ، $\overline{NV} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{LU} \parallel \overline{AC}$. أثبت أن $\overline{AW}, \overline{BV}, \overline{CU}$ تتقاطع في نقطة (عند النقطة K).

6. في المثلث ABC (الشكل $2-16$) $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع في النقطة K. النقاط L, M, N تقع على $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ على الترتيب، والنقاط P, R, Q منتصفات $\overline{AL}, \overline{CN}, \overline{BM}$. أثبت أن $\overline{DP}, \overline{EQ}, \overline{FR}$ تتقاطع في نقطة إذا كانت النقاط D, E, F منتصفات $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ على الترتيب.

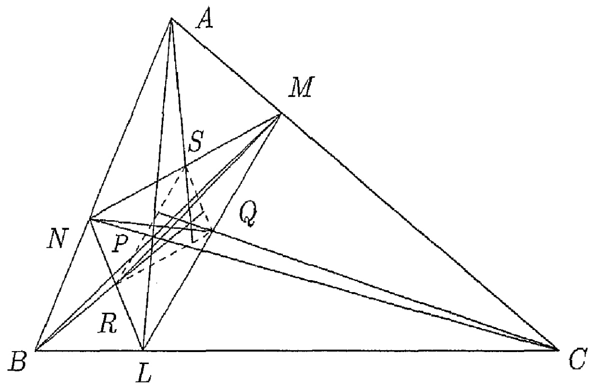


شكل $2-15$



شكل $2-16$

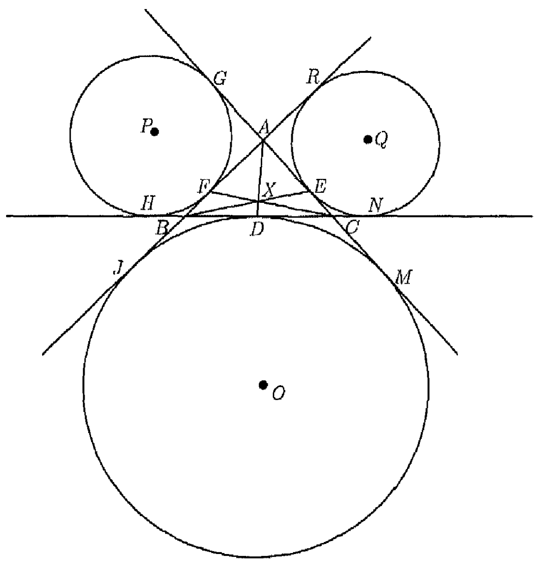
7. في المثلث ABC (الشكل $2-17$) $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع في النقطة P . النقاط S, Q, R منتصفات $\overline{MN}, \overline{ML}, \overline{NL}$. أثبت أن $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BR}, \overrightarrow{CQ}$ تتقاطع في نقطة .



شكل $2-17$

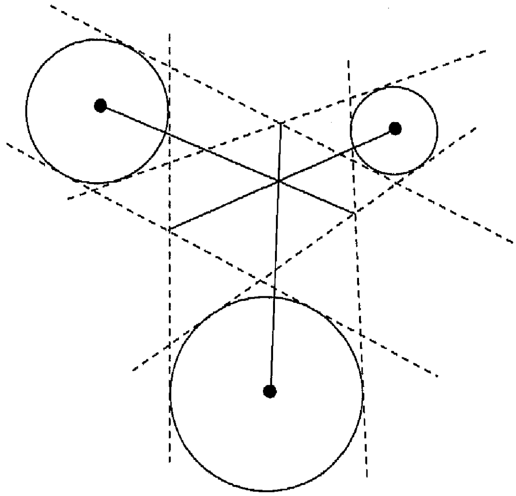
8. في المثلث ABC (الشكل $17-2$)، $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع في النقطة P. النقاط S, Q, R تقع على $\overline{MN}, \overline{ML}, \overline{NL}$ على الترتيب. إذا تقاطعت $\overline{LS}, \overline{MR}, \overline{NQ}$ في نقطة واحدة، فأثبت أن $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BR}, \overrightarrow{CQ}$ تتقاطع في نقطة .

9. الدوائر P, O, Q خارجية بالنسبة للمثلث ABC (أي تمس أحد أضلاعه وامتداد الضلعين الآخرين)، وتمس أضلاعه في النقاط الموضحة بالشكل $18-2$. أثبت أن $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ تتقاطع في نقطة واحدة.



شكل $18-2$

10. ثلاث دوائر مختلفة غير متداخلة ولا متقاطعة، يصل بين كل دائرتين مثنى مثنى مماسان خارجيان مشتركان يتقاطعان في نقطة (كما في الشكل $19-2$). أثبت أن المستقيمات التي تمر بمراكز هذه الدوائر ونقاط تقاطع المماسات تتقاطع في نقطة واحدة .



شكل $2-19$

الفصل الثالث

نقاطٌ على استقامةٍ واحدة

الثنوية Duality

في الهندسة الإقليدية ، هناك أوضاع كثيرة تظهر فيها علاقات بين النقاط والمستقيمات ، وفي الحالة التي تتعلق بشأن النقاط والمستقيمات في المستوى ، عندما نضع كلمة نقطة محل كلمة مستقيم وكلمة مستقيم محل كلمة نقطة في العبارات التي نستخدم فيها هاتين الكلمتين ، فإن العبارة الجديدة يقال عنها إنها ثنوية العبارة الأصلية. وفي بعض الأحيان قد تحتاج العبارة إلى بعض التعديلات لتحافظ على بنيتها الرياضية السليمة.

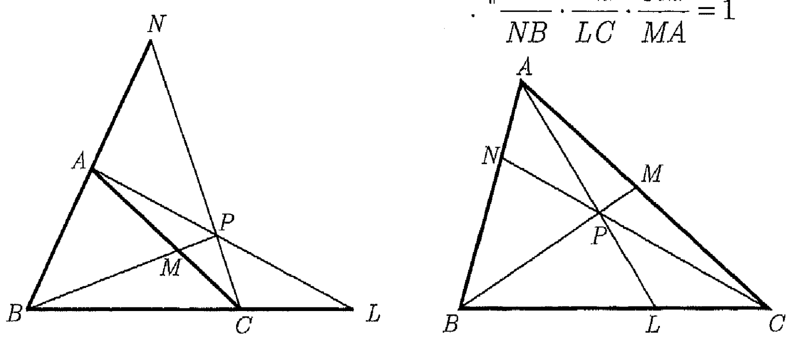
وقد اكتشف تشارلز جوليان براينشون (١٧٨٥ - ١٨٦٤) Charles Julien Brianchon مبدأ الثنوية أو المقابلة أثناء استخدام هذه العلاقة على نظرية باسكال ، وسوف نتطرق إلى هذه النظريات لاحقاً في هذا الفصل. وعند انتقالنا من الفصل الثاني إلى الفصل الثالث سنأخذ في اعتبارنا مبدأ الثنوية أو المقابلة ؛ وذلك لأن التقاطع في نقطة بالنسبة للمستقيمات يقابل وضع نقاط على استقامة واحدة بالنسبة للنقاط. إن المقصد الأول من هذا الفصل هو وقوع نقاط على استقامة واحدة. دعونا أولاً نقدم مثالاً على مبدأ الثنوية أو المقابلة.

العبارة	العبارة المقابلة
١- أي نقطتين مختلفتين (غير متطابقتين) تعينان مستقيماً وحيداً .	١- أي مستقيمين مختلفين (غير متوازين ولا متطابقين) يعينان نقطة وحيدة .
٢- أي نقطة تحوي عدداً غير منتهٍ من المستقيمات .	٢- أي مستقيم يحوي عدداً غير منتهٍ من النقاط .
٣- بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة نحصل على مثلث وحيد.	٣- بثلاثة مستقيمات غير ملتقية في نقطة واحدة نحصل على ثلاثي أضلاع وحيد.

المثال الأخير يوضح أننا يجب أن نعدل قليلاً عند صياغة العبارة المقابلة ؛ ولذا، وعلى وجه التحديد نجد أن " التقاطع في نقطة واحدة concurrent " يقابل " نقاط على استقامة واحدة collinear " كما في لفظ "مثلث" triangle، والمقابل لها لفظ "ثلاثي أضلاع " trilateral.

والآن دعونا نستدعي نظرية شيفا مرة أخرى (انظر الشكل 1 – 3) والتي تنص على أنه " إذا كان لدينا ثلاثة مستقيمات تحوي الرؤوس A, B, C من المثلث ABC ، وتقطع الأضلاع المقابلة في النقاط L, M, N على الترتيب، فإنها تتقاطع في نقطة واحدة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \text{ ".}$$



شكل 1 – 3

وقبل ذلك، نستطيع أن نقول إنه في معظم الأحيان فإن ثنوية (مقابل) المسلمة هو أيضاً مسلمة، وأن ثنوية (مقابل) التعريف هو أيضاً تعريف، وبالتالي في معظم الأحيان أيضاً، فإنه إذا كانت العبارة نظرية، فإن ثنويتها (مقابلها) بالمثل هو نظرية*.

و على أي حال، فنحن في النهاية نود أن نمتلك عبارة تكون مؤهلة لتصبح نظرية. على وجه التحديد، ماذا نريد أن نبحث هنا؟ مع معرفتنا بمبدأ الثنوية، سنحاول صياغة العبارة المقابلة لنظرية شيفا، والتي هي في الواقع إعادة اكتشاف للنظرية المهملة للرياضي الإسكندري المعروف منيلوس Menelaus ** والتي سوف نناقشها في الجزء القادم، وهي التي قادت جيوفاني شيفا لاستنتاج نظريته التي ظهرت في كتابه الأول (ميلانو ١٦٧٨) بواسطة مبدأ الثنوية - لاحظ نظرية منيلوس التالية وعلاقة التقابل بين النظريتين .

النقاط الثلاث P, Q, R والتي تقع على الترتيب على الأضلاع $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$ في المثلث ABC (انظر الشكل $2-3$) تكون على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان : *** "$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1$".

نظرية منيلوس Menelaus's Theorem

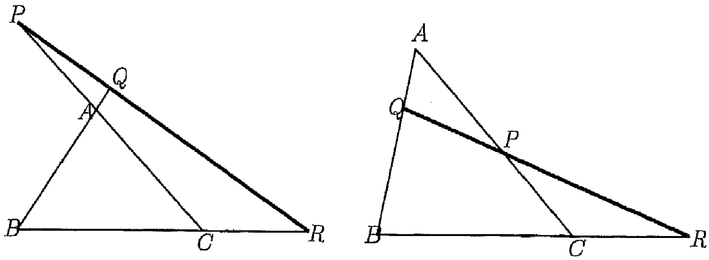
قدم منيلوس الإسكندري (١٠٠ بعد الميلاد) في عمله الذي يحمل عنوان "الكروية " نظريته المعروفة والتي نقدمها هنا، مطبقاً ذلك في المستوى أولاً، بغرض تطوير أطروحته الأصلية على الأشكال

---

* يتفرد النظام الهندسي بأنه يستند إلى مسلمات وتعاريف، وتكون ثنوية تلك العبارات كلها صحيحة، وثنوية كل نظرية هي أيضاً صحيحة، ويبرر ذلك الادعاء أن برهان ثنوية النظرية يتم استنتاجه بسهولة باستبدال كل عبارة في هذا البرهان بالعبارة الثنوية لها (المقابلة لها) في النظرية الأصلية.

** في العصور المظلمة، كثير من الرياضيات اليونانية التقليدية فقدت ونسيت.

*** سيتم توضيح سبب وجود الإشارة السالبة عند شرح إثبات النظرية.



شكل 2 − 3

الكروية*، وكما ذكرنا فإن هذه النظرية التي تحمل اسم منيلوس لم تدخل حيز الشهرة قبل إعادة إحيائها بواسطة جيوفاني شيفا كجزء من عمله في عام ١٦٧٨ م.

نظرية 3−1 (**نظرية منيلوس**) النقاط الثلاث P,Q,R والتي تقع على الترتيب على الأضلاع $\overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC}$ في المثلث ABC (انظر لشكل 2 − 3) تكون على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP}{PA}=-1$$

كما في نظرية شيفا، فإننا نحتاج أن نتحرك في اتجاهين عند الإثبات، فلدينا عبارتان وسنستخدم واحدة للوصول إلى الأخرى ثم العكس، وسنبدأ أولاً بإثبات أنه

---

* الصورة الكروية المناظرة لنظرية 1 − 3 في المثلث الكروي ABC : $\frac{\sin\widehat{AQ}}{\sin\widehat{QB}}\cdot\frac{\sin\widehat{BR}}{\sin\widehat{RC}}\cdot\frac{\sin\widehat{CP}}{\sin\widehat{PA}}=-1$

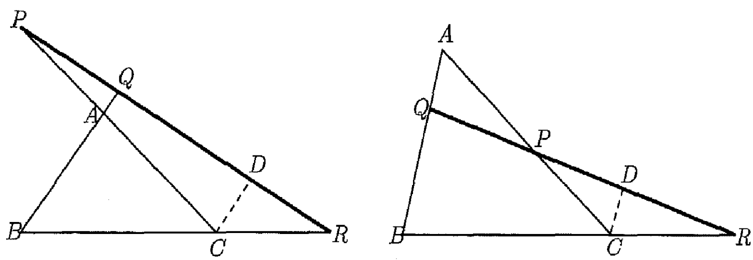
إذا كانت النقاط P, Q, R تقع على الترتيب على الأضلاع $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}$ في المثلث ABC تكون على استقامة فإن $\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP}{PA}=-1$.

البرهان I

نرسم من النقطة C المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعه في D (انظر الشكل 3 – 3).

$$\Delta DCR \sim \Delta QBR \Rightarrow \frac{DC}{QB}=\frac{RC}{BR} \quad or \quad DC=\frac{(QB)(RC)}{BR} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\Delta PDC \sim \Delta PQA \Rightarrow \frac{DC}{AQ}=\frac{CP}{PA} \quad or \quad DC=\frac{(AQ)(CP)}{PA} \qquad (\mathrm{II})$$



شكل 3 – 3

من $(\mathrm{II}),(\mathrm{I})$ نحصل على :

$$\frac{(QB)(RC)}{BR}=\frac{(AQ)(CP)}{PA} \quad or \quad (QB)(RC)(PA)=(AQ)(CP)(BR)$$

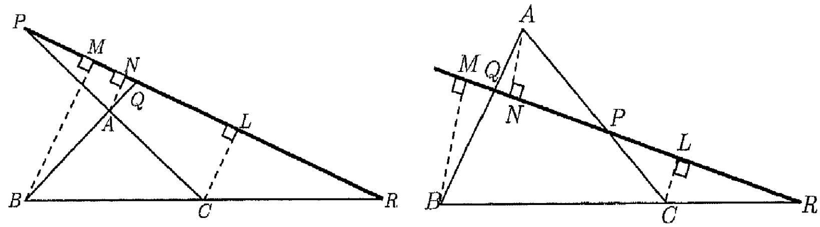
وهذا يعني أن :

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$$

باتخاذ الاتجاه في الاعتبار في الرسم الأيسر من الشكل 3 – 3 سنرى أن النسب $\frac{BR}{RC},\frac{CP}{PA},\frac{AQ}{QB}$ كلها سالبة بينما على الرسم الأيمن سنجد أن النسبة $\frac{BR}{RC}$ هي النسبة الوحيدة السالبة ؛ ولذا ففي الحالتين عدد فردي من النسب السالبة أي أن

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP}{PA}=-1 \quad \bullet$$

البرهان *II*



شكل 4 – 3

مرة ثانية ، سنبدأ بفرض أن النقاط P,Q,R تقع على استقامة واحدة، ثم نرسم $\overline{BM}\perp\overleftrightarrow{PR},\overline{AN}\perp\overleftrightarrow{PR}$. وكذلك نرسم $\overline{CL}\perp\overleftrightarrow{PR}$ (انظر الشكل 4 – 3).

$$\Delta BMQ \sim \Delta ANQ \Rightarrow \frac{AQ}{QB}=\frac{AN}{BM} \qquad (\text{I})$$

$$\Delta LCP \sim \Delta NAP \Rightarrow \frac{CP}{PA}=\frac{LC}{AN} \qquad (\text{II})$$

$$\Delta MRB \sim \Delta LRC \Rightarrow \frac{BR}{RC}=\frac{BM}{LC} \qquad (\text{III})$$

من $(\mathrm{I}),(\mathrm{II}),(\mathrm{III})$ نحصل على :

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{BR}{RC}=\frac{AN}{BM}\cdot\frac{LC}{AN}\cdot\frac{BM}{LC}=1$$

في الرسم الأيسر من الشكل 4 − 3 سنرى أن $\frac{AQ}{QB}$ نسبة سالبة وكذلك $\frac{CP}{PA},\frac{BR}{RC}$ نسبتان سالبتان ، إذن :

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP}{PA}=-1$$

وفي الرسم الأيمن من الشكل 4 − 3 سنرى أن $\frac{AQ}{QB},\frac{CP}{PA}$ نسبتان موجبتان بينما $\frac{AQ}{QB}$ نسبة سالبة ، إذن :

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP}{PA}=-1 \quad \bullet$$

لإكمال برهان نظرية منيلوس علينا أن نثبت عكس ما أثبتناه سابقاً ، أي سنثبت الآن أنه إذا كانت النقاط الثلاث P,Q,R تقع على المستقيمات $\overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC}$ على الترتيب بحيث $\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP}{PA}=-1$. فإن P,Q,R تقع عل استقامة واحدة.

البرهان

في الشكل 2 − 3 نفرض أن المستقيم الذي تقع عليه النقطتان R,Q يقطع $\overline{AC}$ في النقطة P' ، ويمكننا استخدام الجزء الذي أثبتناه في النظرية آنفاً. نعلم أن :

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP'}{P'A}=-1$$

ولكن لدينا الفرضية (المعطى) التي تقول :

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1 \,.$$

إذن $\frac{CP}{PA} = \frac{CP'}{P'A}$ ، أي أن النقطة P تنطبق على النقطة P' ، وهذا يثبت وقوع النقاط الثلاث على استقامة واحدة .●

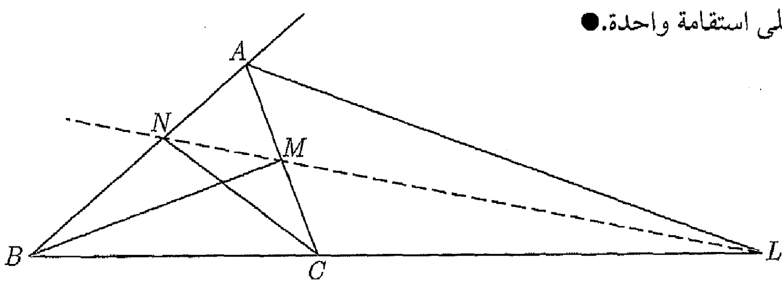
ستوفر لنا نظرية منيلوس طريقاً مفيداً لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة.

تطبيقات على نظرية منيلوس

قبل بحث النظريات المشهورة التي نستخدم نظرية منيلوس في إثباتها ، سنقوم بدراسة بعض تطبيقات هذه النظرية ، حيث كل من هذه التطبيقات التي لا تحمل أسماءً ستقدم لنا بعض النتائج القليلة الشيقة ، والتي يمكن بسهولة إثباتها بواسطة نظرية منيلوس .

تطبيق 1

أثبت أن المنصفين الداخليين لزاويتين في مثلث مختلف الأضلاع ، والمنصف الخارجي للزاوية الثالثة من نفس المثلث تلاقي الأضلاع المقابلة في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.●



شكل 5 – 3

البرهان

في المثلث ABC ، $\overline{BM}, \overline{CN}$ منصفان داخليان للزاويتين $\angle ABC, \angle ACB$ ، $\overline{AL}$ منصف خارجي للزاوية الثالثة عند النقطة A (انظر الشكل 5 – 3). ولأن منصف الزاوية (الداخلي أو الخارجي) يجزئ الضلع المقابل إلى جزأين يتناسبان مع ضلعي المثلث الآخرين. من ذلك نحصل على

$$\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{BC}, \frac{BN}{NA}=\frac{BC}{AC}, \frac{CL}{BL}=\frac{AC}{AB}$$

بالضرب نحصل على :

$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{BN}{NA}\cdot\frac{CL}{BL}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}=1$$

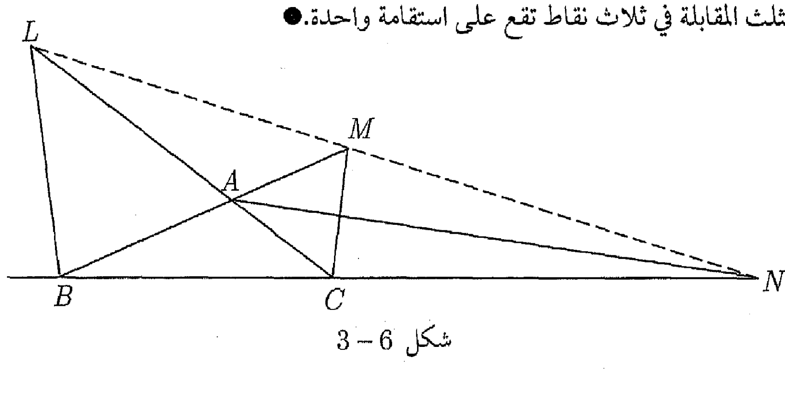
وبما أن $\frac{CL}{BL}=\frac{-CL}{LB}$ ، فإن :

$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{BN}{NA}\cdot\frac{CL}{BL}=-1$$

إذن من نظرية منيلوس ، النقاط P, Q, R تقع عل استقامة واحدة.

تطبيق 2

أثبت أن المنصفات الخارجية لزوايا مثلث مختلف الأضلاع تلاقى أضلاع نفس المثلث المقابلة في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.●



شكل 6 – 3

البرهان

في المثلث ABC ، المنصفات الخارجية للزوايا عند الرؤوس A,B,C تلاقي أضلاع المثلث أو امتداداتها في N,L,M على الترتيب (انظر الشكل 6 – 3). ولأن منصف الزاوية (الداخلي أو الخارجي) يجزئ الضلع المقابل إلى جزأين يتناسبان مع ضلعي المثلث الآخرين ؛ إذن :

$$\frac{CL}{AL}=\frac{BC}{AB},\frac{AM}{BM}=\frac{AC}{BC},\frac{BN}{CN}=\frac{AB}{AC}$$

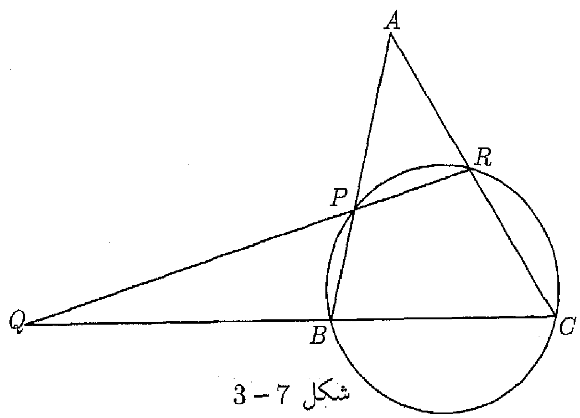
أي أن :

$$\frac{CL}{AL}\frac{AM}{BM}\frac{BN}{CN}=\frac{BC}{AB}\frac{AC}{BC}\frac{AB}{AC}=-1$$ (لأن كل النسب سالبة)

وعليه ؛ فمن نظرية منيلوس ، النقاط P,Q,R تقع على استقامة واحدة.

تطبيق3

إذا كان لدينا دائرة تمر بالرأسين B,C في المثلث ABC ، وتقطع كلاً من $\overline{AB},\overline{AC}$ في P,R على الترتيب، و$\overleftrightarrow{PR}$ يلاقي $\overleftrightarrow{BC}$ في النقطة Q ، فأثبت أن $\frac{QC}{QB}=\frac{(RC)(AC)}{(PB)(AB)}$. ●



شكل 7 – 3

البرهان

في المثلث ABC ، حيث $\overline{QPR}$ قاطع لأضلاعه (انظر الشكل 7 – 3)، وباستخدام نظرية منيلوس $\frac{RC}{AR}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{QB}{CQ}=-1$ ، وبأخذ القيمة المطلقة نحصل على

$$\frac{QC}{QB}=\frac{RC}{AR}\frac{AP}{PB} \qquad (I)$$

ولكن $(AP)(AB)=(AR)(AC)$. (إذا تقاطع قاطعان لدائرة في نقطة خارجها ، فإن حاصل ضرب القاطع الأول في جزئه الخارج عن الدائرة يساوي القاطع الثاني في جزئه الخارج عن الدائرة). إذن ،

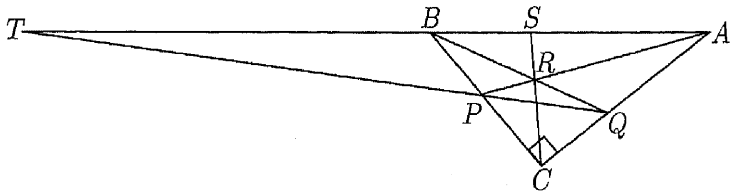
$$\frac{(AP)}{(AR)}=\frac{(AC)}{(AB)} \qquad (\mathrm{II})$$

بالتعويض من (II) في (I) نحصل على $\frac{QC}{QB}=\frac{(RC)(AC)}{(PB)(AB)}$. ●

غالباً ما نحتاج نظرية منيلوس ومقابلها نظرية شيفا لحل المشكلات أو إثبات النظريات. التطبيق التالي يؤكد ذلك.

تطبيق4

في المثلث القائم ABC ، النقطتان P,Q تقع على $\overline{BC},\overline{AC}$ على الترتيب ، بحيث $CP=CQ=2$ ، تتقاطع القطعتان $\overline{BQ},\overline{AP}$ في النقطة R ، رسمنا $\overleftrightarrow{CR}$ يمر بالرأس C وبالنقطة R ويقطع $\overleftrightarrow{AB}$ في S ، ورسمنا $\overrightarrow{QP}$ يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ في T ، فإذا كان طول الوتر $AB=10$ ، $AC=8$. أوجد TS . (الشكل 8 – 3). ●



شكل 8 – 3

البرهان

في المثلث القائم $A\hat{B}C$ ، طول الوتر $AB = 10$ ، $AC = 8$ ، إذن بتطبيق نظرية فيثاغورس $BC = 6$ ، وكذلك في نفس المثلث ، بتطبيق نظرية شيفا حيث $\overline{AP}, \overline{BQ}, \overline{CS}$ تتقاطع في نقطة . إذن :

$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BS}{SA} = 1$$

بالتعويض نحصل على :

$$\frac{6}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{BS}{10 - BS} = 1 \Rightarrow BS = 4$$

والآن، بما أن $\overline{QPT}$ قاطع للمثلث ABC ، وبتطبيق نظرية منيلوس :

$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BT}{TA} = -1$$

ولأننا لا نتعامل مع قطع مستقيمة موجهه ، نستطيع صياغة العلاقة السابقة كالتالي :

$$(AQ) \cdot (CP) \cdot (BT) = (QC) \cdot (PB) \cdot (TA)$$

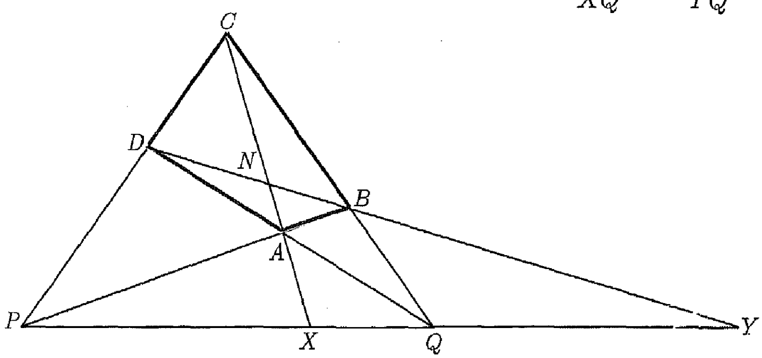
بالتعويض نجد أن :

$$(6) \cdot (2) \cdot (BT) = (2) \cdot (4) \cdot (BT + 10)$$

إذن ، $BT = 20 \Rightarrow TS = 24$.●

تطبيق 5

في الشكل الرباعي $ABCD$ ، يتقاطع كل من $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ في P بينما يتقاطع $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}$ في Q ، القطران $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ يقطعان $\overleftrightarrow{PQ}$ في X, Y على الترتيب. أثبت أن $\frac{PX}{XQ} = -\frac{PY}{YQ}$. (انظر الشكل 9 − 3). ●



شكل 9 − 3

البرهان

بتطبيق نظرية شيفا في المثلث PQC حيث $\overline{PB}, \overline{QD}, \overline{CX}$ تتقاطع في نقطة، إذن :

$$\frac{PX}{XQ} \cdot \frac{QB}{BC} \cdot \frac{CD}{DP} = 1 \qquad (\mathrm{I})$$

والآن بما أن $\overline{DBY}$ قاطع للمثلث PQC وبتطبيق نظرية منيلوس:

$$\frac{PY}{YQ} \cdot \frac{QB}{BC} \cdot \frac{CD}{DP} = -1 \qquad (\mathrm{II})$$

من $(\mathrm{II}),(\mathrm{I})$ نحصل على:

$$\frac{PX}{XQ} = -\frac{PY}{YQ}. \bullet$$

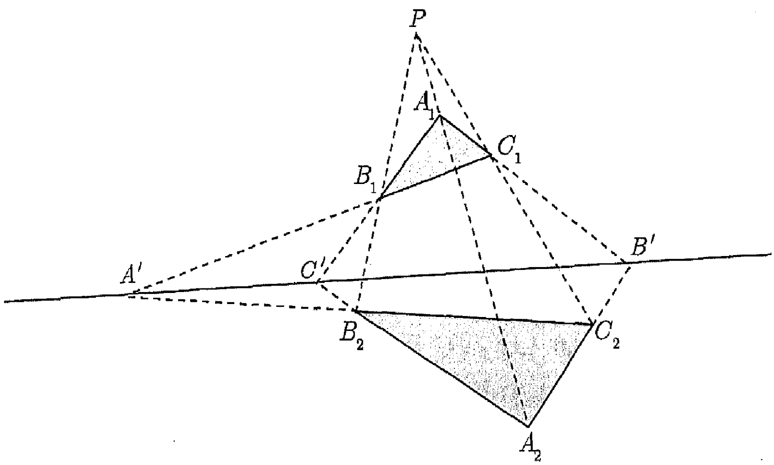
والآن دعونا ندرس بعض النظريات الشهيرة والتي نستطيع إثباتها باستخدام نظرية منيلوس.

نظرية ديزارغ Desargues's Theorem

لم يحظ جيرارد ديزارغ (١٥٩١-١٦٦١) Gerard Desargues طوال حياته بالاهتمام مثلما حظي به آخر حياته. وكانت قلة شعبيته تلك ترجع في جزء منها لتطوير الهندسة التحليلية على يد رينيه ديكارت (١٥٩٦ - ١٦٥٠) Rene Descartes، وبالإضافة إلى ذلك، كان في أطروحات ديزارغ الكثير من المصطلحات الجديدة غير المألوفة إلى حد كبير. (وبالمناسبة نحن نبذل قصارى جهدنا لتلافي أي مصطلحات أو مسميات جديدة في هذا الكتاب. إننا نريد أن نتعلم مما حصل للعالم ديزارغ).

وفي العام ١٦٤٨م، طبع تلميذه في درجة الماجستير أبراهام بوس Abraham Boss كتاباً بعنوان " طريقة ديزارغ العالمية للتدريب على التنظير " Maniere universelle de M.Desargues, pour pratiquer la perspective " والذي لم ينتشر إلا بعد قرنين. وقد احتوى هذا الكتاب على نظرية أصبحت واحدة من المقترحات الأساسية للهندسة الإسقاطية في القرن التاسع عشر. وهذه النظرية هي التي تهمنا هنا والتي تنطوي على وضع أي مثلثين في وضع يتيح لثلاثة مستقيمات تمر بالرؤوس المتناظرة في المثلثين أن تتقاطع في نقطة واحدة بحيث يتحقق أن كل ضلعين متناظرين في المثلثين يتقاطعان في ثلاث نقاط على استقامة واحدة. وسوف نثبت نظرية ديزارغ بواسطة نظرية منيلوس .

نظرية 3–2 إذا تم وضع $\Delta A_1B_1C_1, \Delta A_2B_2C_2$ بحيث كانت المستقيمات $\overleftrightarrow{A_1A_2}, \overleftrightarrow{B_1B_2}, \overleftrightarrow{C_1C_2}$ والتي تمر برؤوسهما المتناظرة تتقاطع في نقطة واحدة، فإن أزواج الأضلاع المتناظرة فيهما تتقاطع في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.



شكل 10 – 3

البرهان

في الشكل 10 – 3 تلتقي المستقيمات $\overleftrightarrow{C_1C_2}, \overleftrightarrow{B_1B_2}, \overleftrightarrow{A_1A_2}$ في نقطة واحدة ولتكن P ، وبفرض $\overleftrightarrow{C_1B_1}, \overleftrightarrow{C_2B_2}$ تلتقي في نقطة A' ، $\overleftrightarrow{C_1A_1}, \overleftrightarrow{C_2A_2}$ تلتقي في نقطة B' ، $\overleftrightarrow{B_1A_1}, \overleftrightarrow{B_2A_2}$ تلتقي في نقطة C'. وباستخدام نظرية منيلوس حيث $\overline{A'B_1C_1}$ قاطع لأضلاع المثلث PB_2C_2 نحصل على :

$$\frac{PB_1}{B_1B_2}\cdot\frac{B_2A'}{A'C_2}\cdot\frac{C_2C_1}{C_1P}=-1 \qquad \text{(I)}$$

بالمثل $\overline{C'B_1A_1}$ قاطع للأضلاع المثلث PB_2A_2 ، إذن

$$\frac{PA_1}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2C'}{C'B_2}\cdot\frac{B_1B_2}{B_1P}=-1 \qquad \text{(II)}$$

وكذلك $\overline{B'A_1C_1}$ قاطع للمثلث PA_2C_2 ، إذن

$$\frac{PC_1}{C_1C_2}\cdot\frac{C_2B'}{B'A_2}\cdot\frac{A_1A_2}{A_1P}=-1 \qquad \text{(III)}$$

بضرب $\text{(III)},\text{(II)},\text{(I)}$ نحصل على :

$$\frac{B_2A'}{A'C_2}\cdot\frac{A_2C'}{C'B_2}\cdot\frac{C_2B'}{B'A_2}=-1$$

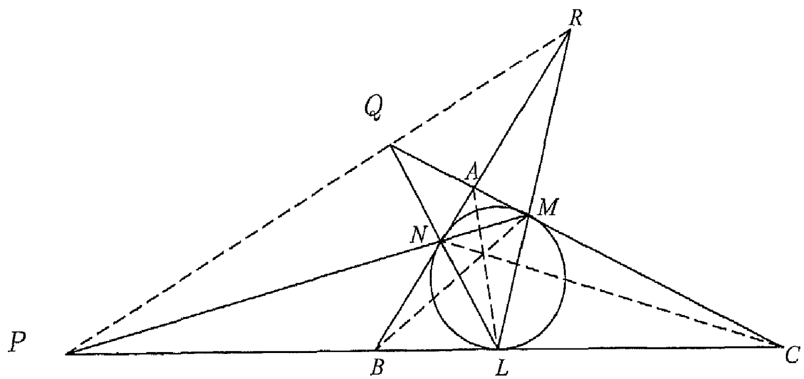
وهذا يحقق نظرية منيلوس على المثلث $C_2B_2A_2$ ، ويجعل النقاط C',B',A' على استقامة واحدة. ●

جدير بالملاحظة أن عكس نظرية ديزارغ هو أيضاً صحيح ، فهو المفهوم الثنوي للنظرية الأصلية ، ولكننا سنترك إثبات ذلك تمريناً.

ولتقدير قيمة نظرية ديزارغ ، سنقدم أمثلة لبعض التطبيقات التي بالطبع يمكن حلها بطرق أخرى ، ولكننا سنطبق نظرية ديزارغ في إثباتها .

تطبيق6

أُنشئت دائرة تمس أضلاع المثلث ABC من الداخل في النقاط L,M,N على الترتيب ، يتقاطع كل من $\overleftrightarrow{MN},\overleftrightarrow{BC}$ في P ، $\overleftrightarrow{NL},\overleftrightarrow{AC}$ في Q ، $\overleftrightarrow{ML},\overleftrightarrow{AB}$ في R . أثبت أن النقاط P,Q,R تقع على استقامة واحدة. (انظر الشكل 11 – 3) ●



شكل 11 – 3

البرهان

لأن القطعتين المماستين للدائرة من نقطة خارجها متطابقتان، إذن

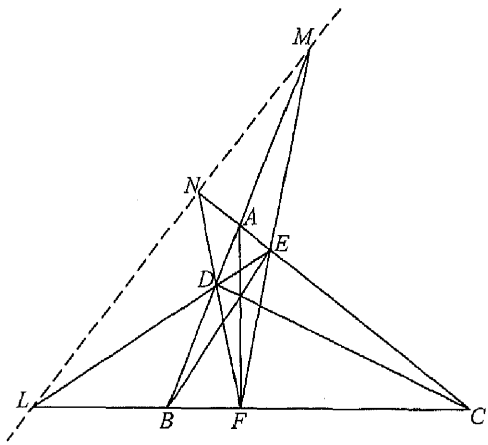
$$AN = AM \ , \ NB = BL \ , \ MC = LC$$

ومن ذلك:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{MC}{AM} = 1$$

وبتطبيق نظرية شيفا نستنتج أن $\overleftrightarrow{AL}, \overleftrightarrow{BM}, \overleftrightarrow{CN}$ تتقاطع في نقطة واحدة، ولأن هذه المستقيمات تمر بالرؤوس المتناظرة للمثلثين $\Delta ABC, \Delta LMN$، وبتطبيق نظرية ديزارغ نستنتج أن الأزواج المتناظرة من أضلاع المثلثين تتقاطع في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة، أي أن P, Q, R تقع على استقامة واحدة. ●

تطبيق 7



شكل $12-3$

لتكن النقاط F, E, D نقاط تقاطع ارتفاعات المثلث مع أضلاعه من الرؤوس A, B, C على الترتيب، وأضلاع مثلث المساقط* FED ، $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{DF}, \overleftrightarrow{DE}$ تقطع أضلاع المثلث ABC ، $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BC}$ في M, N, L على الترتيب. أثبت أن النقاط L, M, N تقع على استقامة واحدة .(انظر الشكل $12-3$) ●

البرهان

لتكن A, B, C ، F, E, D هي الرؤوس المتناظرة لكل من $\Delta ABC, \Delta FED$ ، ولأن $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BE}$ تتقاطع في نقطة واحدة (ارتفاعات المثلث ΔABC)، إذن

---

* مثلث المساقط (لمثلث معطى) هو المثلث الذي رؤوسه هي نقاط تقاطع الأعمدة الساقطة على أضلاع المثلث من أي نقطة اختيارية.

بتطبيق نظرية ديزارغ نستنتج أن نقاط تقاطع الأضلاع المتناظرة $\overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{FE}, \overleftrightarrow{BA}$ ، $\overleftrightarrow{FD}, \overleftrightarrow{CA}$ الثلاث تقع على استقامة واحدة ●.

نظرية باسكال Pascal's Theorem

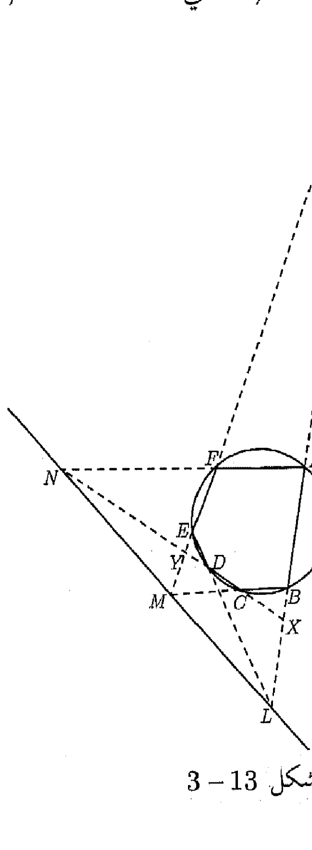
يعتبر بليز باسكال (١٦٢٣-١٦٦٢) Blaise Pascal الذي كان أحد معاصري ديزارغ واحداً من أكثر الرياضيين عبقرية في تاريخ الرياضيات. وعلى الرغم من أن غرابة أطواره قد قللت الكثير من ظهور إمكاناته الحقيقية، إلا أنه يعد واحداً ممن أرسوا مبادئ علم الاحتمالات (ثمرة مراسلاته مع فيرما Fermat)، كما قدم مساهمات مهمة عديدة في فروع أخرى من الرياضيات، وسوف نهتم هنا بواحدة من إسهاماته في الهندسة.

ففي عام ١٦٤٠م، عندما بلغ السادسة عشرة من عمره، قدم مقالاً عن القطوع المخروطية من ورقة واحدة بعنوان " مقال في هندسة المخروطيات Essay pour les coniques " واحتوى هذا المقال على النظرية التي أشار إليها باسكال بعنوان " السداسي العجيب mysterium hexagrammicum " والتي أثارت إعجاب ديكارت Descartes للغاية وكأنه لم يصدق أنها من صنع فتى في السادسة عشرة من عمره، وتنص هذه النظرية على أن أضلاع الشكل السداسي المرسوم داخل قطع مخروطي تتقاطع في نقاط تقع على استقامة واحدة، وسوف ندرس فقط الحالة التي يكون فيها القطع المخروطي دائرة ولا يوجد ضلعان متوازيان متقابلان في ذلك السداسي، وهذا ما رأينا أنه يخدم غرضنا في هذا الفصل.

نظرية باسكال 3–3 إذا رسم سداسي غير منتظم داخل دائرة بحيث كانت أضلاعه المتقابلة غير متوازية ، فإن نقاط تقاطع هذه الأضلاع المتقابلة تقع على استقامة واحدة.

البرهان

السداسي $ABCDEF$ مرسوم داخل دائرة (انظر الشكل 13 − 3) ويلتقي ضلعاه $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{DE}$ في النقطة L ، $\overleftrightarrow{CB}, \overleftrightarrow{EF}$ في النقطة M ، $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AF}$ في النقطة N ، وكذلك $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CN}$ في النقطة X ، $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{CN}$ في النقطة Y ، $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{AB}$ في النقطة Z .



شكل 13 − 3

باستخدام نظرية منيلوس حيث $\overleftrightarrow{BC}$ قاطع لأضلاع المثلث ΔXYZ نحصل على :

$$\frac{ZB}{BX}\cdot\frac{XC}{CY}\cdot\frac{YM}{MZ}=-1 \qquad \text{(I)}$$

وباعتبار $\overleftrightarrow{AF}$ قاطعاً لأضلاع المثلث ΔXYZ ، وباستخدام نظرية منيلوس مرة ثانية نجد أن :

$$\frac{ZA}{AX}\cdot\frac{YF}{FZ}\cdot\frac{XN}{NY}=-1 \qquad \text{(II)}$$

وأيضا باعتبار $\overleftrightarrow{DE}$ قاطعاً لأضلاع المثلث ΔXYZ ، وباستخدام نظرية منيلوس نجد أن :

$$\frac{XD}{DY}\cdot\frac{YE}{EZ}\cdot\frac{ZL}{LX}=-1 \qquad \text{(III)}$$

بضرب $(\text{III}),(\text{II}),(\text{I})$ نحصل على :

$$\frac{YM}{MZ}\cdot\frac{XN}{NY}\cdot\frac{ZL}{LX}\cdot\frac{(ZB)(ZA)}{(EZ)(FZ)}\cdot\frac{(XD)(XC)}{(AX)(BX)}\cdot\frac{(YE)(YF)}{(DY)(CY)}=-1 \qquad \text{(IV)}$$

عند رسم قاطعين لدائرة من نقطة خارجة ، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول و الجزء الخارجي منه يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني و الجزء الخارجي منه ، إذن

$$\frac{(ZB)(ZA)}{(EZ)(FZ)}=1 \qquad \text{(V)}$$

$$\frac{(XD)(XC)}{(AX)(BX)}=1 \qquad \text{(VI)}$$

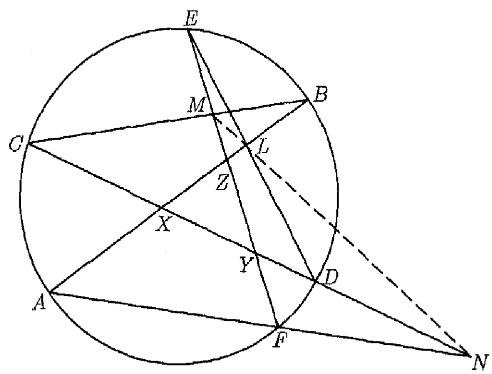
$$\frac{(YE)(YF)}{(DY)(CY)}=1 \qquad \text{(VII)}$$

إذن باستخدام نظرية منيلوس ، P, Q, R تقع على استقامة واحدة. ●

ومن المثير للاهتمام ملاحظة أن نظرية باسكال من الممكن أن تتوسع حسب النسق التالي

نظرية 3–4 (تطوير نظرية باسكال) إذا وقعت رؤوس سداسي غير منتظم على دائرة (بأي ترتيب) فإن نقاط تقاطع الأضلاع المتقابلة (إذا وجدت) تقع على استقامة واحدة.

وكمثال على هذا التطوير ، ندعوك لبرهنة نظرية 4 – 3 على الشكل 14 – 3 ، حيث هناك تعديل بسيط واحد فقط يجب أن يتم ليكون السبب في الوصول من المعادلة (V) إلى المعادلة (VII). لاحظ أن نفس الأزواج من الأضلاع المتقابلة ستستخدم هنا كما استخدمناها سابقا.



شكل 14 – 3

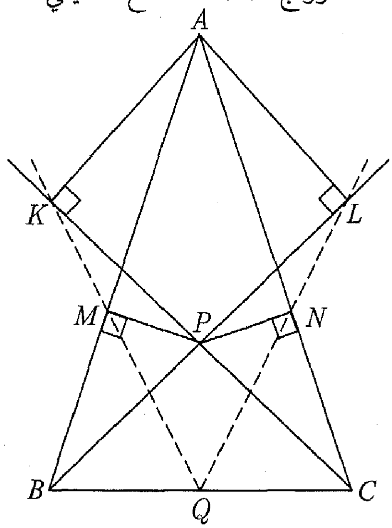
لنظرية باسكال العديد من التطبيقات وسندرس الآن بعض هذه التطبيقات .

تطبيق 8

إذا كانت النقطة P تقع داخل المثلث ABC ، وكانت M,N نقطتي تقاطع العمودين من P على الضلعين $\overline{AB},\overline{AC}$ على الترتيب، $\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{CP}$ في النقطة K ، $\overline{AL} \perp \overleftrightarrow{BP}$ في النقطة L ، (انظر الشكل 15 – 3). أثبت أن $\overleftrightarrow{KM},\overleftrightarrow{LN},\overleftrightarrow{BC}$ تتقاطع في نقطة واحدة. ●

البرهان

يمكننا بسهولة إثبات أن النقاط A,K,M,P,N,L تقع على دائرة واحدة نصف قطرها $\overline{AP}$ ، ويمكننا توضيح ذلك بأن الزاويتين القائمتين $\angle AKP,\angle AMP$ مرسومتان على نفس نصف الدائرة، وكذلك نفس الحالة بالنسبة الزاويتين القائمتين $\angle ALP,\angle ANP$ ، وباستخدام تطوير نظرية باسكال (نظرية 4 – 3)، نلاحظ أن السداسي $AKMPNL$ أزواج أضلاعه تتقاطع كما يلي



شكل 15 – 3

$$\overleftrightarrow{AM} \bigcap \overleftrightarrow{LP} = B$$

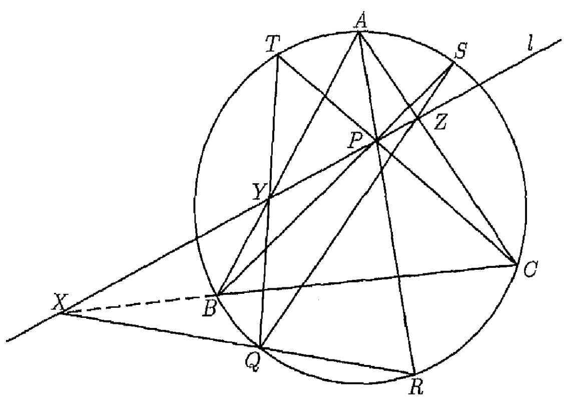
$$\overleftrightarrow{AN} \bigcap \overleftrightarrow{KP} = C$$

$$\overleftrightarrow{KM} \bigcap \overleftrightarrow{LN} = Q$$

باستخدام نظرية باسكال ، نصل إلى أن النقاط B,C,Q تقع على استقامة واحدة ، وهذا ما يجعلنا نستطيع القول بأن $\overleftrightarrow{KM}, \overleftrightarrow{LN}, \overleftrightarrow{BC}$ تتقاطع في نقطة واحدة.●

تطبيق 9

سنختار أي نقطة P تقع داخل ΔABC ، وتنتمي إلى الخط المستقيم l الذي يقطع أضلاع المثلث $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}$ في النقاط Z, Y, X على الترتيب. وإذا كانت $\overleftrightarrow{AP}, \overleftrightarrow{BP}, \overleftrightarrow{CP}$ تقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ΔABC في النقاط R, S, T على الترتيب (انظر الشكل 16 – 3). أثبت أن $\overleftrightarrow{RX}, \overleftrightarrow{SZ}, \overleftrightarrow{TY}$ تتقاطع في نقطة واحدة. ●



شكل 16 – 3

البرهان

ليكن $\overleftrightarrow{RX}$ يقطع الدائرة المحيطة في النقطة Q ، ولنطبق نظرية باسكال على السداسي $ACRQBT$ حيث $\overleftrightarrow{AR} \cap \overleftrightarrow{AB}$ هو النقطة P ، $\overleftrightarrow{RQ} \cap \overleftrightarrow{CB}$ هو النقطة X ، $\overleftrightarrow{TQ} \cap \overleftrightarrow{AB}$ هو نقطة تقع على المستقيم l والتي يجب أن تكون النقطة Y (لأن $\overleftrightarrow{AB} \cap l$ هو النقطة Y).

والآن لندرس السداسي $ASCRQB$ الذي فيه $\overleftrightarrow{AR} \cap \overleftrightarrow{AB}$ هو النقطة P ، $\overleftrightarrow{RQ} \cap \overleftrightarrow{CB}$ هو النقطة X ، $\overleftrightarrow{SQ} \cap \overleftrightarrow{AC}$ هو نقطة تقع على الخط المستقيم l والتي يجب أن تكون النقطة Z. إذن $\overleftrightarrow{RX}, \overleftrightarrow{SZ}, \overleftrightarrow{TY}$ تتقاطع في نقطة واحدة. ●

نظرية براينشون Brianchon's Theorem

في عام ١٨٠٦ م عندما كان طالباً بمدرسة البوليتكنيك في سن الواحدة والعشرين ، قدم تشارلز جوليان براينشون (١٧٨٥-١٨٦٤) Charles Julian Brianchonمقالاً في مجلة المدرسة Journal de L,Ecole Polytechnique ، أصبح بعد ذلك من الإسهامات الأساسية في دراسة القطوع المخروطية في الهندسة الإسقاطية. وقد أدت هذه الإسهامات لإعادة صياغة ما تم نسيانه بعض الشيء من نظرية باسكال وامتدادها. وبعد ذلك نشر براينشون نظريته الجديدة التي تحمل اسم نظرية براينشون Brianchon ,s Theorem والتي تنص على أن " الأقطار الثلاثة لأي سداسي يحيط بقطع مخروطي ، تتقاطع في نقطة واحدة " *.

الغريب أن ذلك يحمل تشابهاً مع نظرية باسكال ، ولكن في الحقيقة كل منهما ثنوية للأخرى ويتضح ذلك بسهولة عند مقارنة نصيهما كما يلي

* Source book in Mathematics edited by D.E. Smith (New York: McGraw-Hill book Co.,1929), p.336.

نظرية براينشون

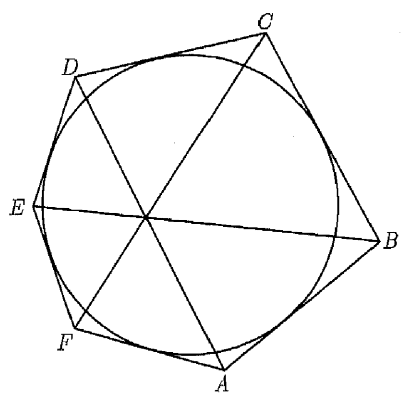
المستقيمات المارة بالرؤوس المتقابلة لسداسي يحيط بقطع مخروطي تتقاطع في نقطة واحدة.

نظرية باسكال

نقاط تقاطع الأضلاع المتقابلة في السداسي المرسوم داخل قطع مخروطي تقع على استقامة واحدة .

نلاحظ أن النصين السابقين هما على حد سواء ما عدا الكلمات التي تحتها خط ، والتي كل منها تعد ثنوية للأخرى ، وكما فعلنا في نظرية باسكال سنعمل فقط على حالة أن القطع المخروطي دائرة.

نظرية 3–5 (**نظرية براينشون**) إذا أنشأ سداسي يحيط بدائرة فإن المستقيمات المارة برؤوس السداسي المتقابلة تتقاطع في نقطة واحدة (انظر الشكل 17 – 3).



شكل 17 – 3

أبسط البراهين لهذه النظرية تتطلب معرفة بعض مفاهيم الهندسة الإسقاطية. وعلى الرغم من أننا عند هذه المرحلة نستطيع تقديم برهان لهذه النظرية باستخدام طرق الهندسة الإقليدية ، إلا أن برهاننا سيكون أكثر إيجازاً إذا انتظرنا قليلا حتى ندرس المحاور الأساسية في هذا الفصل.

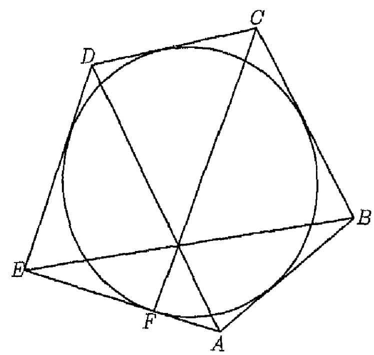
اقترح براينشون التطبيقات التالية بعد نشر نظريته الجديدة مباشرة.

تطبيق 10

إذا رُسم الخماسي $ABCDE$ محيطاً بدائرة ويمسها في النقاط F, M, N, R, S ، وتقاطع قطراه $\overline{AD}, \overline{BE}$ في النقطة P . فأثبت أن النقاط C, P, F تقع على استقامة واحدة (انظر الشكل $18-3$). ●

البرهان

لنعتبر أن الشكل السداسي الذي يحيط بدائرة في الشكل $17-3$ فيه الضلعان $\overline{AF}, \overline{EF}$ اندمجا معاً في قطعة مستقيمة واحدة. إذن، $\overline{AFE}$ هو الآن ضلع من أضلاع الخماسي الذي يحيط بالدائرة، والنقطة F هي نقطة تماس (انظر الشكل $18-3$). وهكذا نستطيع أن نرى الخماسي في الشكل $18-3$ والذي تولد من السداسي. والآن، ببساطة يمكننا تطبيق نظرية براينشون على الشكل الجديد للحصول على المطلوب النهائي الذي هو أن $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ تتقاطع في نقطة واحدة هي P ، أو نقول إن النقاط C, P, F تقع على استقامة واحدة .

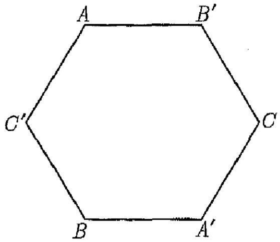


شكل 18 – 3

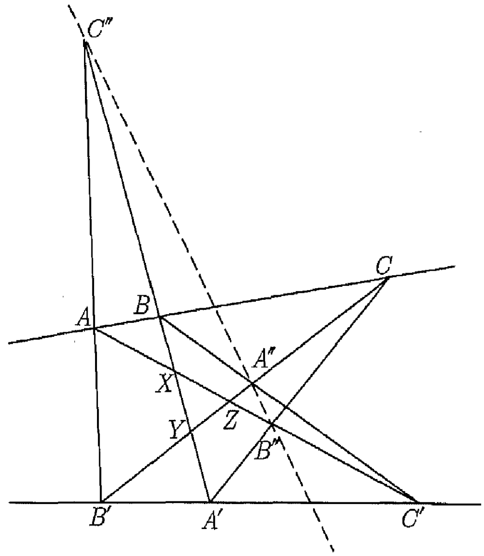
نظرية بابوس Pappus 's Theorem

إذا نظرنا لرؤوس السداسي $AB'CA'BC'$ (الشكل 19–3) ووضعناها بالتبادل على خطين مستقيمين (انظر الشكل 20–3). ثم رسمنا الخطوط المستقيمة التي كانت تصل بين رؤوس الشكل الأول على الشكل الثاني، والتي ستتقاطع في ثلاث نقاط (تنتج من تقاطع كل ضلعين متقابلين في الشكل الأول) سنجد أن هذه النقاط تقع على استقامة واحدة. هذا الاستنتاج قدمه بابوس الإسكندري Pappus of Alexandria في مجموعته الرياضية Mathematical Collection في حوالي عام ٣٠٠ بعد الميلاد.

لكي نقدم الدليل على صحة هذه النظرية، دعونا نكررها وسرعان ما نلاحظ أننا سنستخدم في إثباتها نظرية منيلوس عدة مرات.



شكل 19 – 3



شكل 20 – 3

نظرية 3–6 (**نظرية بابوس**) النقاط A,B,C تقع على خط مستقيم واحد، والنقاط A',B',C' تقع على مستقيم آخر وبأي ترتيب. فإذا تقاطع $\overline{AB'},\overline{A'B}$ في C''، وتقاطع $\overline{AC'},\overline{A'C}$ في B''، وتقاطع $\overline{BC'},\overline{B'C}$ في A''. فإن النقاط A'',B'',C'' تقع على استقامة واحدة.

البرهان

على الشكل 20 – 3 ، يلتقي $\overline{B'C},\overline{A'B}$ في النقطة Y ، ويلتقي $\overline{AC'},\overline{A'B}$ في النقطة X ، ويلتقي $\overline{B'C},\overline{AC'}$ في النقطة Z ، وبتطبيق نظرية منيلوس حيث $\overline{C''AB'}$ قاطع لـ ΔXYZ نحصل على :

$$\frac{ZB'}{YB'}\cdot\frac{XA}{ZA}\cdot\frac{YC''}{XC''}=-1 \qquad (\mathrm{I})$$

وباعتبار $\overline{A'B''C}$ قاطعاً لأضلاع ΔXYZ ، وباستخدام نظرية منيلوس نحصل على

$$\frac{YA'}{XA'}\cdot\frac{XB''}{ZB''}\cdot\frac{ZC}{YC}=-1 \qquad (\mathrm{II})$$

وأيضا باعتبار $\overline{BA''C'}$ قاطعاً لأضلاع المثلث ΔXYZ ، وباستخدام نظرية منيلوس نحصل على :

$$\frac{YB}{XB}\cdot\frac{ZA''}{YA''}\cdot\frac{XC'}{ZC'}=-1 \qquad (\mathrm{III})$$

بضرب $(\mathrm{III}),(\mathrm{II}),(\mathrm{I})$ نحصل على :

$$\frac{YC''}{XC''}\cdot\frac{XB''}{ZB''}\cdot\frac{ZA''}{YA''}\cdot\frac{ZB'}{YB'}\cdot\frac{YA'}{XA'}\cdot\frac{XC'}{ZC'}\cdot\frac{XA}{ZA}\cdot\frac{ZC}{YC}\cdot\frac{YB}{XB}=-1 \qquad (\mathrm{IV})$$

ولأن النقاط A,B,C تقع على استقامة واحدة ، وكذلك النقاط A',B',C' أيضا تقع على استقامة واحدة ، فإننا نستطيع أن نستنتج بواسطة نظرية منيلوس العلاقتين التاليتين (عندما نعتبر أن كلا المستقيمين قاطعان للمثلث ABC).

$$\frac{ZB'}{YB'}\cdot\frac{YA'}{XA'}\cdot\frac{XC'}{ZC'}=-1 \qquad (\mathrm{V})$$

$$\frac{XA}{ZA}\cdot\frac{ZC}{YC}\cdot\frac{YB}{XB}=-1 \qquad (\mathrm{VI})$$

بالتعويض من $(\mathrm{VI}),(\mathrm{V})$ في (IV) نحصل على :

$$\frac{YC''}{XC''}\cdot\frac{XB''}{ZB''}\cdot\frac{ZA''}{YA''}=-1$$

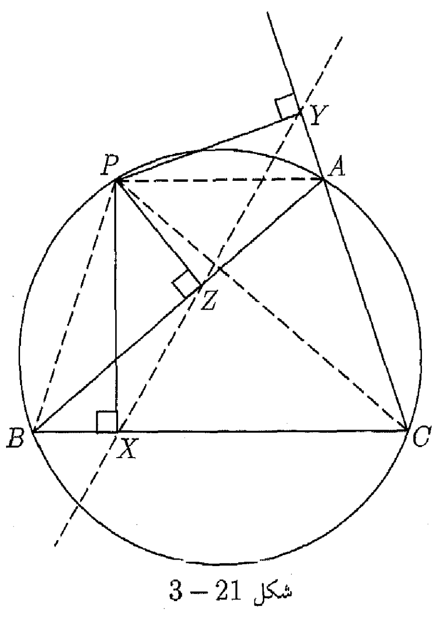
ومن نظرية منيلوس نجد أن A'',B'',C'' تقع على استقامة واحدة. ●

خط سيمسون The Simson Line

في واحدة من أكثر حالات الظلم في تاريخ الرياضيات، نشر وليام والاس (١٧٦٨-١٨٤٣) William Wallace نظرية أصيلة وجديدة في دار نشر Thomas Leybourne's Mathematical Repository في العام (١٧٩٩)، لكن بسبب الإهمال، نسبت إلى الرياضي الإنجليزي المشهور روبرت سيمسون (١٦٨٧-١٧٦٨) Robert Simson الذي قام بترجمة كتاب العناصر لإقليدس Euclid's Elements من اللاتينية إلى الإنجليزية (انظر الصفحات ٩٦-٩٧ لمعرفة المزيد عن سيمسون).

وسوف نستقي معلوماتنا في هذا الكتاب من المرجع المشهور Simsons 's theorm.

نظرية 3-7 (**نظرية سيمسون**) الأعمدة المرسومة من أي نقطة على دائرة محيطة بمثلث، على أضلاع هذا المثلث، تتقاطع في نقاط تقع على استقامة واحدة.



شكل 21 – 3

في الشكل 21 – 3 ، النقطة P تقع على الدائرة المحيطة بـ ΔABC ، $\overleftrightarrow{PY} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في النقطة Y ، $\overleftrightarrow{PZ} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في النقطة Z ، $\overleftrightarrow{PX} \perp \overleftrightarrow{BC}$ في النقطة X ، ووفقاً لنظرية سيمسون (أي نظرية والاس)، النقاط X, Y, Z تقع على مستقيم واحد عادة ما يطلق عليه خط سيمسون Simson Line . (أحياناً يطلق عليه اسم مستقيم المساقط Pedal line).

ليس من الضروري أن يكون برهاننا الأول لنظرية سيمسون هو الأبسط ولكننا من أجل الاتساق سوف نستخدم نظرية منيلوس لإثبات هذه النظرية، ثم نقدم طريقة ثانية كشرح مستقل لبرهان النظرية .

البرهان *I*

(انظر الشكل 21 – 3). لنرسم $\overline{PA}, \overline{PC}, \overline{PB}$. لدينا

$$m\angle PBA = \frac{1}{2} m\,\widehat{AP}$$

$$m\angle PCA = \frac{1}{2} m\,\widehat{AP}$$

لذلك : $\angle PBA = \angle PCA = a$.

وعليه فإن

$\dfrac{BZ}{PZ} = \cot a = \dfrac{CY}{PY}$ في المثلثين PZB, PYC ، ولذا فإن

$$\frac{BZ}{CY} = \frac{PZ}{PY} \tag{I}$$

بالمثل : $m\angle PBA = m\angle PCB = b$ (كلاهما يساوي $\frac{1}{2} m\,\widehat{PB}$)؛ لذلك

$\dfrac{AZ}{PZ} = \cot b = \dfrac{CX}{PX}$ في المثلثين PAZ, PCX ، وهذا يقود إلى :

$$\frac{CX}{AZ}=\frac{PX}{PZ} \qquad \text{(II)}$$

ولأن $\angle PBC,\angle PAC$ زاويتان متقابلتان في شكل رباعي دائري، إذن هما زاويتان متكاملتان.

ولكن $\angle PAY,\angle PAC$ هما أيضا متكاملتان، إذن $\angle PBC=\angle PAY=c$ ؛ وبالتالي

$\frac{BX}{PX}=\cot c=\frac{AY}{PY}$ في المثلثين PBX,PAY ، وهذا يقود إلى:

$$\frac{AY}{BX}=\frac{PY}{PX} \qquad \text{(III)}$$

بضرب $\text{(I)},\text{(II)},\text{(III)}$ نحصل على:

$$\frac{BZ}{CY}\cdot\frac{CX}{AZ}\cdot\frac{AY}{BX}=\frac{PZ}{PY}\cdot\frac{PX}{PZ}\cdot\frac{PY}{PX}=1$$ (أو (-1) حسب دراسة الاتجاه)

إذن باستخدام نظرية منيلوس X,Y,Z تقع على استقامة واحدة، وتعين هذه النقاط الثلاث خط سيمسون للمثلث ABC بالنسبة للنقطة P. ●

البرهان *II*

(انظر الشكل 21 – 3). لأن $\angle PYA,\angle PZA$ متقابلتان متكاملتان، إذن الشكل الرباعي $PZAY$ دائري. نرسم $\overline{PA},\overline{PC},\overline{PB}$. إذن:

$$\angle PYZ=\angle PAZ \qquad \text{(I)}$$

بالمثل $\angle PYC,\angle PXC$ متقابلتان متكاملتان، إذن الشكل الرباعي $PXCY$ دائري. وعليه نجد:

$$\angle PYX=\angle PCB \qquad \text{(II)}$$

ولكن الرباعي $PACB$ أيضاً دائري ؛ لأنه أربع نقاط على دائرة، إذن:

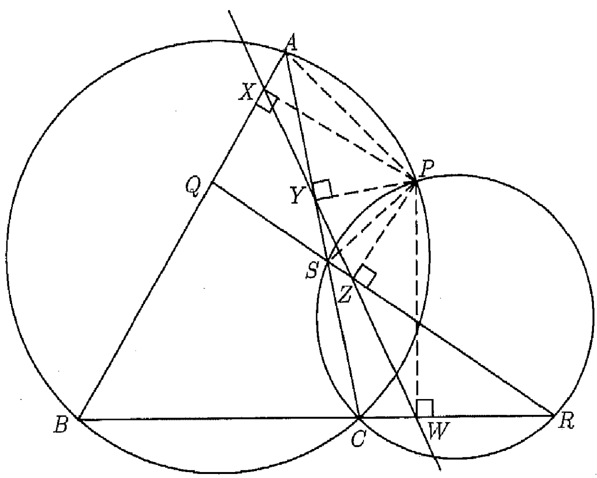
$$m\angle PAZ\left(m\angle PAB\right)=m\angle PCB \qquad \left(\text{III}\right)$$

من $\left(\text{I}\right),\left(\text{II}\right),\left(\text{III}\right)$ نحصل على $m\angle PYZ=m\angle PYX$ ، وهذا يعني أن النقاط X,Y,Z تقع على استقامة واحدة. ●

تطبيق 11

ليكن ABC مثلثاً، ولنفرض أن $\overleftrightarrow{QSR}$ يقطع $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA}$ في النقاط Q,R,S على الترتيب. الدائرتان المحيطتان بكل من $\Delta ABC,\Delta SCR$ تتقاطعان في النقطة P. أثبت أن الشكل الرباعي $APSQ$ دائري (انظر الشكل $22-3$). ●

البرهان



شكل $22-3$

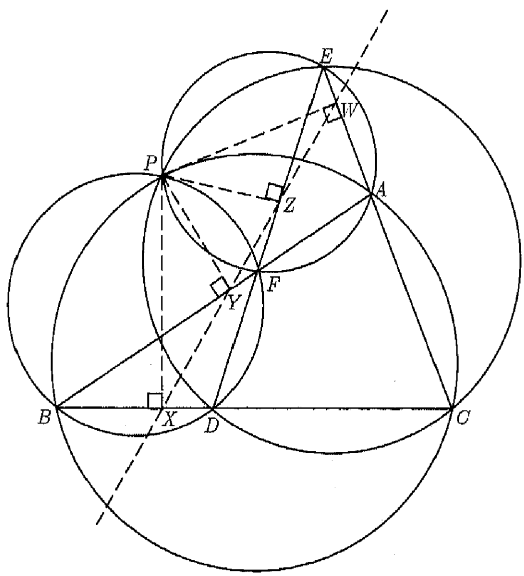
لنرسم الأعمدة $\overline{PX},\overline{PY},\overline{PZ},\overline{PW}$ على $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{QR},\overleftrightarrow{BC}$ على الترتيب كما في الشكل $22-3$. لأن النقطة P تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، إذن النقاط X,Y,W تقع على استقامة واحدة (خط سيمسون). بالمثل؛ لأن النقطة P تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث SCR ، إذن النقاط Y,Z,W

تقع على استقامة واحدة. إذن النقطة P يجب أن تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث AQS (عكس نظرية سيمسون والذي نترك إثباته كتدريب). إذن الشكل الرباعي $APSQ$ دائري (انظر الشكل $22 - 3$). ●

تطبيق 12

القطع المستقيمة $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{EC}, \overline{ED}$ تشكل المثلثات ABC, FBD, EFA, EDC حسب الشكل $23 - 3$. أثبت أن الدوائر المحيطة بهذه المثلثات تشترك في نقطة واحدة. ●

البرهان



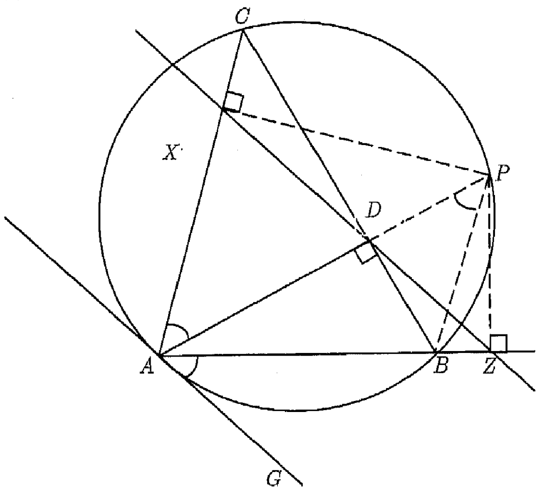
شكل $23 - 3$

لنفرض أن P هي إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين المحيطتين بالمثلثين ABC, FBD اللتين تتقاطعين أيضاً في B . من النقطة P نرسم الأعمدة $\overline{PX}, \overline{PY}, \overline{PZ}, \overline{PW}$ على

$\overline{BC},\overline{AB},\overline{ED},\overline{EC}$ على الترتيب كما في الشكل 23 − 3. لأن النقطة P تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، إذن النقاط X,Y,W تقع على استقامة واحدة؛ إذن النقاط X,Y,Z,W تقع على استقامة واحدة لأن النقاط Y,Z,W تقع على استقامة واحدة. إذن النقطة P يجب أن تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث EFA (عكس نظرية سيمسون والذي نترك إثباته كتدريب). ولنفس السبب، لأن النقاط X,Z,W تقع على استقامة واحدة، إذن النقطة P يجب أن تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث EDC. إذن الدوائر الأربع تمر بالنقطة P. ●

لخط سيمسون العديد من الخصائص، نقدم الآن القليل منها.

نظرية 3–8 (**الخاصية الأولى لخط سيمسون**) إذا كان العمود $\overline{AD}$ في ΔABC يلاقي الدائرة المحيطة به في النقطة P ، فإن خط سيمسون لنقطة P بالنسبة للمثلث ABC يوازي المستقيم المماس للدائرة عن النقطة A.



شكل 24 − 3

البرهان

لأن $\overline{PX},\overline{PZ}$ عمودان على $\overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{AB}$ على الترتيب في المثلث ABC ، فالنقاط X,D,Z تعين خط سيمسون للنقطة P بالنسبة للمثلث ABC. نرسم $\overline{PB}$ (انظر الشكل 24 – 3). في الشكل الرباعي $PDBZ$ ، $m\angle PDB = m\angle PZB = 90°$ وهذا يعني أن الشكل $PDBZ$ رباعي دائري (زاويتان متقابلتان متكاملتان)، ومن ذلك نستنتج أن :

$$m\angle DZB = m\angle DPB \qquad (I)$$

وفي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC :

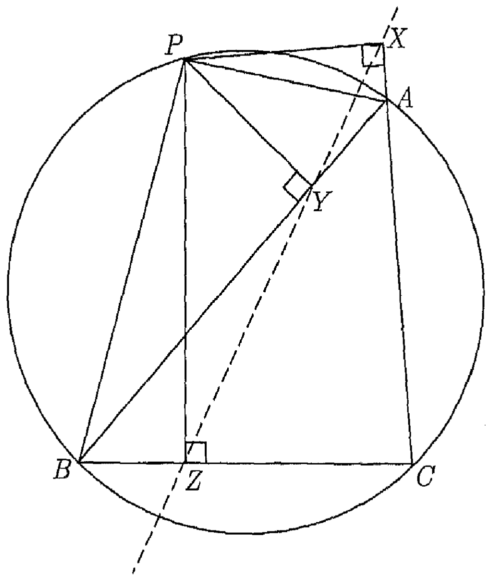
$$m\angle GAB = \tfrac{1}{2}(m\widehat{AB}) \ , \ m\angle DPB(m\angle APB) = \tfrac{1}{2}(m\widehat{AB})$$

إذن :

$$m\angle GAB = m\angle DBP \qquad (II)$$

من $(I),(II)$ لدينا $m\angle DZB = m\angle GAB$ ، وهذا يعني أن خط سيمسون $\overleftrightarrow{XDZ}$ يوازي $\overleftrightarrow{GA}$. ●

نظرية 3–9 (**الخاصية الثانية لخط سيمسون**) من النقطة P التي تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ارسم الأعمدة $\overline{PX},\overline{PY},\overline{PZ}$ على الأضلاع $\overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC}$ على الترتيب. إن $(PA)(PZ)=(PB)(PX)$. (انظر الشكل 25 – 3)



شكل 25 – 3

البرهان

لأن $m\angle PYB = m\angle PZB = 90^\circ$ إذن الشكل $PYZB$ * رباعي دائري ؛

ومن ذلك

$$m\angle PBY = m\angle PZY \qquad (\mathrm{I})$$

وبطريقة مماثلة :

$$m\angle PXY = m\angle PAY \qquad (\mathrm{II})$$

لأن $m\angle PXA = m\angle PYA = 90^\circ$ ؛ إذن الشكل $PXAY$ رباعي دائري ، ومن ذلك ولكن النقاط X, Y, Z على استقامة واحدة (خط سيمسون) إذن من $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$

---

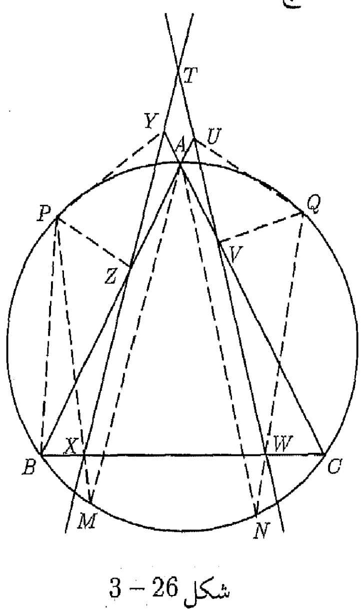
* الشكل الرباعي يكون دائرياً (أي رؤوسه الأربعة على دائرة) إذا كان فيه زاويتان متطابقتان مرسومتان على أحد أضلاعه ورأساهما في جهة واحدة منه.

$$\Delta PAB \sim \Delta PXZ \Rightarrow \frac{PA}{PX} = \frac{PB}{PZ} \Rightarrow (PA)(PZ) = (PB)(PX) \bullet$$

نظرية 3–10 (**الخاصية الثالثة لخط سيمسون**) قياس الزاوية المحصورة بين خطي سيمسون لنقطتين تقعان على دائرة محيطة بمثلث تساوي نصف قياس القوس المحصور بين هاتين النقطتين .

البرهان

في الشكل $(3-26)$ ، $\overleftrightarrow{XYZ}$ هو خط سيمسون للنقطة P ، $\overleftrightarrow{UVW}$ هو خط سيمسون للنقطة Q ، نمد $\overline{PX}, \overline{QW}$ ليقطعا الدائرة في M, N على الترتيب، ثم نرسم $\overline{AM}, \overline{AN}$ ، ولأن $m\angle PZB = m\angle PXB = 90°$ ، فإن الشكل $PZXB$ رباعي دائري ، ومن هذا نستنتج أن



شكل 26 – 3

$$m\angle ZXP = m\angle ZBP \qquad \text{(I)}$$

$$m\angle ABP = m\angle AMP \quad or \quad m\angle ZBP = m\angle AMP \qquad \text{(II)}$$

إذن، من $(\text{I}),(\text{II})$ $m\angle ZXP = m\angle AMP$ ؛ وعليه فإن:

$$\overleftrightarrow{XYZ} \parallel \overline{AM}$$

وبنفس الطريقة نستطيع إثبات أن $\overleftrightarrow{UVW} \parallel \overline{AN}$.

وبالتالي؛ إذا كانت النقطة T هي نقطة تقاطع خطي سيمسون، فإن $m\angle XTW = m\angle MAN$ ، وذلك لأن ضلعيهما المتناظرين متوازيان. والآن $m\angle MAN = \frac{1}{2}(m\widehat{MN})$. ولكن لأن $\overline{PM} \parallel \overline{QN}$ ، فإن $m\widehat{PQ} = m\widehat{MN}$ ،

وبالتالي $m\angle MAN = \frac{1}{2}(m\widehat{MN})$ ، إذن، $m\angle XTW = \frac{1}{2}(m\widehat{PQ})$. ●

يوجد هنا تطبيق شيق لنظرية سيمسون، حيث قابلتنا مشكلة سابقة عندما أثبتنا في الفصل الأول المغالطة التي تزعم أن كل المثلثات المختلفة الأضلاع هي مثلثات متطابقة الضلعين. وقد رسمنا أعمدة من النقطة G إلى $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$ لتلاقي المستقيمات في النقاط D, F, E على الترتيب. ولأن النقطة G على الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، فإن نظرية سيمسون تثبت لنا أن النقاط D, F, E تقع على استقامة واحدة.

المسلمة المشهورة لموريتز باش (١٨٤٣-١٩٣٠) Moritz Pasch التي تنص على أن الخط المستقيم الذي يقطع ضلعاً واحداً من أضلاع مثلث (من الداخل) لابد أن يقطع أيضاً واحداً فقط من ضلعي المثلث الآخرين (من الداخل)، إلا إذا مر هذا المستقيم بأحد رؤوس المثلث.

وكان إقليدس قد افترض هذه الفكرة تقريباً في مسلماته، ومع ذلك؛ فإن توظيف هذه المسلمة يجعلنا نجزم بأنه حينما نسقط عمودين من نقطة تلاقي منصف

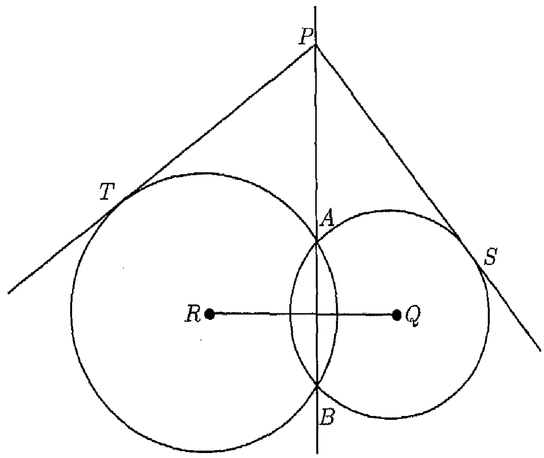
زاوية في المثلث مع العمود المنصف للضلع المقابل لتلك الزاوية على ضلعي الزاوية، فإن واحداً منهما بالضبط يقطع أحد الضلعين من الداخل والآخر يقطع امتداد الضلع الآخر، وهذا ما يمكننا من تجنب المغالطة التي عرضناها سابقاً.

المحاور الأساسية Radical Axes

عرضنا سابقاً في هذا الفصل نظرية براينشون Brianchon ,s Theorem كنظرية مقابلة لنظرية باسكال Pascal,s Theorem ، وكنا قد قمنا بتأجيل برهان هذه النظرية لأننا كنا نحتاج مزيداً من المعرفة حول المحاور الأساسية Radical Axes.

وسوف نعرض الآن بعض خواص المحور الأساسي المهمة والتي سنستخدمها في إثبات نظرية براينشون .

لندرس معا الدائرتين R, Q (انظر الشكل $27-3$) واللتين تتقاطعان في A, B ، فإذا كانت النقطة P هي أي نقطة تقع على $\overleftrightarrow{AB}$ بحيث لا تقع بين A, B ، ورسمنا المماسين $\overline{PT}, \overline{PS}$ للدائرتين R, Q على الترتيب، فمن خلال دراستنا لمبادئ الهندسة نعلم أن PT وسط متناسب بين PB, PA ، أي $(PT)^2 = (PB)(PA)$ ، وبالمثل بالنسبة للدائرة Q ، لدينا $(PS)^2 = (PB)(PA)$. إذن، $PT = PS$. ولأننا اخترنا النقطة P في أي موقع على $\overleftrightarrow{AB}$ (بحيث لا تقع بين A, B)، فإننا نستطيع أن نقول إن القطعتين المماستين للدائرتين R, Q متطابقتان. ولكن قبل أن نقرر أن هذا الاستنتاج موضع نظرية، علينا أن نثبت أن النقطة P والتي يخرج منها مماسان لدائرتين يجب أن تقع على $\overleftrightarrow{AB}$. والإثبات كالتالي :



شكل 27 – 3

لنفرض أن النقطة P أي نقطة حيث المماسان PT, PS متطابقان، وليكن $\overline{PA}$ يقطع الدائرة R في B ويقطع الدائرة Q في B' ، وكما سبق نستطيع كتابة العلاقتين

$$\left(PT\right)^2 = \left(PB\right)\left(PA\right)$$
$$\left(PS\right)^2 = \left(PB'\right)\left(PA\right)$$

ولأن: $PT = PS$ ، إذن $PB = PB'$ ، وهـذا معنـاه انطبـاق النقطـتين B, B' ، وأن النقطة P تقع على القاطع المشترك للدائرتين $\overleftrightarrow{AB}$. نطلق على الخط المستقيم الذي يحتوي النهايات المشتركة لكل المماسات المتطابقة لدائرتين، المحور الأساسي Radical Axis لتلك الدائرتين، ويمكننا أن نصوغ الآن هذه النتيجة.

نظرية 3–11 المحور الأساسي لدائرتين متقاطعتين هو قاطع مشترك لهما.

ويترتب على ذلك مباشرة أن المحور الأساسي لدائرتين متماستين هو المماس المشترك لهما ، وقبل أن نتدارس وضع المحور الأساسي لدائرتين غير متقاطعتين (متباعدتين) نحتاج لدراسة النظرية التالية .

نظرية 3–12 المحل الهندسي لنقطة الفرق بين مربعي البعد بينها وبين نقطتين ثابتتين يكون ثابتاً

هو مستقيم عمودي على القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين الثابتتين.

البرهان

لتكن R, Q نقطتين ثابتتين ، P نقطة على المحل الهندسي (انظر الشكل 3 – 28). لنرسم $\overline{PR}, \overline{PQ}$ ، وننشئ $\overline{PN} \perp \overline{RQ}$ ، وباستخدام نظرية فيثاغورس نحصل على

$$(PR)^2 - (RN)^2 = (PN)^2 \text{ ، } (PQ)^2 - (QN)^2 = (PN)^2$$

إذن ،

$$(PR)^2 - (RN)^2 = (PQ)^2 - (QN)^2 \text{ أو}$$

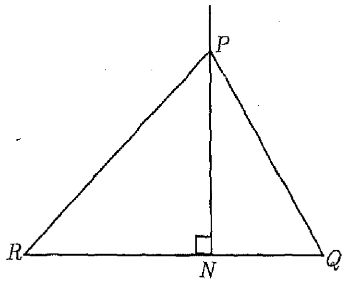
$$(PR)^2 - (PQ)^2 = (RN)^2 - (QN)^2 = k$$

نفرض أن $RQ = d$ ، وبتحليل المتطابقة الأخيرة نحصل على :

$$\left(RN+QN\right)\left(RN-QN\right)=k$$

أو $d\left(RN-QN\right)=k$ ، ومنه نجد أن :

$$RN-QN=\frac{k}{d} \qquad \left(\mathrm{I}\right)$$



شكل 28 – 3

تذكر أن

$$RN+QN=d \qquad \left(\mathrm{II}\right)$$

بحل المعادلتين $\left(\mathrm{II}\right),\left(\mathrm{I}\right)$ نحصل على :

$$RN=\frac{d^2+k}{2d} \ ، \ QN=\frac{d^2-k}{2d}$$

وهـذا يحـدد موضـع النقطـة N ، ولأن كـلاً مـن d,k ثابتـان في جميـع الحـالات ، فالنقطة P يجب أن تقع على المستقيم العمودي على $\overline{RQ}$ عند النقطة N ، والتي تقسم $\overline{QR}$ حسب النسبة :

$$\frac{RN}{QN}=\frac{d^2+k}{d^2-k}$$

نستطيع استنتاج برهان أن هذا هو المحل الهندسي بتوضيح أن أي نقطة تقع على $\overline{PN}$ تحقق الشرط المعطى ، وسنترك ذلك للقارئ . ●

نظرية 12 – 3 تساعدنا على استكمال دراسة المحاور الأساسية Radical Axes ، والآن علينا أن نعين المحور الأساسي لدائرتين غير متقاطعتين ، وحدسنا يشير إلى تحقيق ذلك في النظرية التالية .

نظرية ٣– ١٣ المحور الأساسي لدائرتين غير متقاطعتين، هو خط مستقيم عمودي على خط مركزيهما.

البرهان

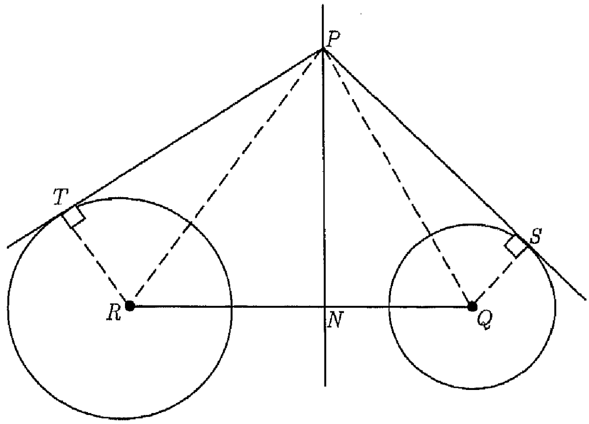
سنبدأ بفرض أن نصفي قطري الدائرتين R,Q هما r,q على الترتيب. وكذلك نفرض أن النقطة P على المحل الهندسي المطلوب، وحيث إن القطعتين المماستين $\overline{PT},\overline{PS}$ متطابقتان (انظر الشكل 29 – 3). فبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلثين PTR,PSQ نحصل على :

$$(PR)^2 - r^2 = (PT)^2 \qquad , \qquad (PQ)^2 - q^2 = (PS)^2$$

ولكن $PT = PS$ ؛ إذن :

$$(PR)^2 - r^2 = (PQ)^2 - q^2 \qquad or \qquad (PR)^2 - (PQ)^2 = r^2 - q^2$$

لأن الطرف الأيمن من المتطابقة ثابت ، فإننا نستنتج (باستخدام نظرية 12 – 3) أن المحل الهندسي للنقطة P هو الخط المستقيم الذي يحتوي نفس النقطة P والذي هو عمودي على $\overleftrightarrow{RQ}$. ●



شكل 29 – 3

بطريقة مماثلة لتلك المستخدمة في البرهان السابق يمكننا تعيين موضع النقطة N بدلالة نصفي القطرين والمسافة بين مركزي الدائرتين. و كنتيجة مباشرة لنظرية 13 – 3 ، لدينا النظرية التالية.

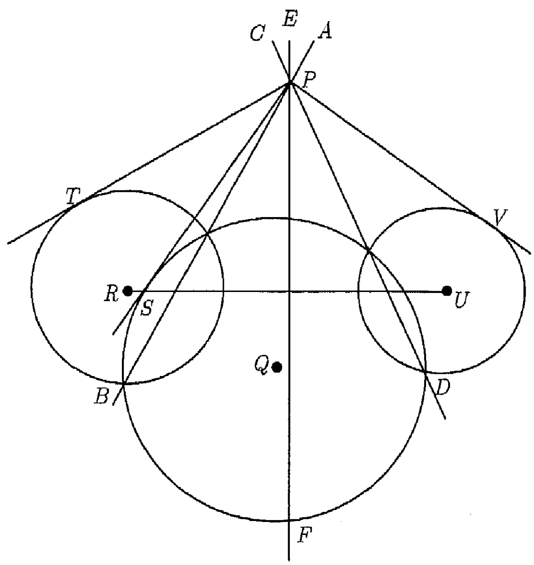
نظرية 3–14 المحاور الأساسية لثلاث دوائر مراكزها ليست على استقامة واحدة تلتقي في نقطة واحدة.

البرهان

دعنا نعتبر أن الدوائر الثلاث هي R, Q, U ، وأن محاورها الأساسية هي $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{EF}$ (انظر الشكل 30 – 3). نفرض أن P نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$. باستخدام المحور الأساسي $\overleftrightarrow{AB}$ للدائرتين R, Q نحصل على $\overline{PT} = \overline{PS}$. وباستخدام المحور الأساسي $\overleftrightarrow{CD}$ للدائرتين Q, U نحصل على $\overline{PV} = \overline{PS}$ (لاحظ أن $\overleftrightarrow{PT}, \overleftrightarrow{PS}, \overleftrightarrow{PV}$ مماسات للدوائر المعطاة)، إذن $\overline{PT} = \overline{PV}$ ، وهذا يدل على أن

النقطة P يجب أن تقع على المحور الأساسي $\overleftrightarrow{EF}$ للدائرتين R,U ، وهذا يثبت أن المحاور الأساسية تتقاطع في نقطة واحدة P . ●

على $\overline{PV} = \overline{PS}$ (لاحظ أن $\overleftrightarrow{PT}, \overleftrightarrow{PS}, \overleftrightarrow{PV}$ مماسات للدوائر المعطاة)، إذن $\overline{PT} = \overline{PV}$ ، وهذا يدل على أن النقطة P يجب أن تقع على المحور الأساسي $\overleftrightarrow{EF}$ للدائرتين R,U ، وهذا يثبت أن المحاور الأساسية تتقاطع في نقطة واحدة P . ●



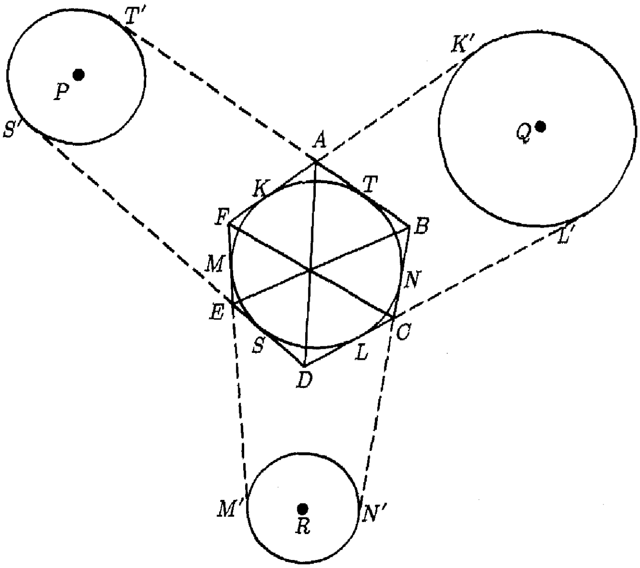
شكل 30 – 3

بعد أن عرضنا موضوع المحور الأساسي ، نحن جاهزون الآن لبرهنة نظرية براينشون Brianchon's Theorem ، والتي كنا قد ناقشناها في وقت سابق في هذا الفصل. وقد قدم هذا البرهان سموجرفيسكي Smogorzhevski في كتابه " المسطرة في الإنشاءات الهندسية "

"The Ruler in Geometrical Constructions, New York: Blaisdell Publishing Company,1961 ,pp.33-35"

نظرية 15-3 (نظرية برايانشون) إذا أنشئ سداسي يحيط بدائرة، فإن المستقيمات المارة برؤوس السداسي المتقابلة تتقاطع في نقطة واحدة.

البرهان



شكل 31 – 3

كما يبدو في الشكل 31 – 3 ، أضلاع الشكل السداسي $ABCDEF$ تمس الدائرة في النقاط T, N, L, S, M, K ، أما النقاط K', L', N', M', S', T' فقد تم اختيارها على $\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BA}$ على الترتيب، بحيث:

$$.KK' = LL' = NN' = MM' = SS' = TT'$$

لننشئ الآن الدائرة P التي تمس كلاً من $\overline{BA}, \overline{DE}$ في النقاط T', S' على الترتيب (بسهولة يمكن تبرير وجود هذه الدائرة). بالمثل ننشئ الدائرة Q التي تمس كلاً من $\overline{FA}, \overline{DC}$ في النقاط K', L' على الترتيب، وأخيراً ننشئ الدائرة R التي تمس كلاً من $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{BC}$ في النقاط M', N' على الترتيب أيضاً.

لأن القطعتين المماستين المرسومتين من نقطة خارج دائرة لهما نفس الطول، إذن $FM = FK$، ولكننا بالفرض نعلم أن $MM' = KK'$، إذن بالجمع نحصل على:

$$FM' = FK'$$

وبالمثل:

$$CL = CN, LL' = NN'$$

بالطرح نجد أن:

$$CL' = CN'$$

الآن، وبقليل من الملاحظة، نرى أن النقطتين F, C كل منهما نقطتا النهاية للقطعتين المماستين المتطابقتين للدائرتين R, Q. إذن، هاتان النقطتان تحددان المحور الأساسي $\overleftrightarrow{CF}$ للدائرتين R, Q.

وباستخدام نفس الأسلوب، سنجد بسهولة أن $\overleftrightarrow{AD}$ هو المحور الأساسي للدائرتين P, Q، و $\overleftrightarrow{BE}$ هو المحور الأساسي للدائرتين P, R.

قد أثبتنا سابقاً (نظرية $14-3$) أن المحاور الأساسية لثلاث دوائر مراكزها ليست على استقامة واحدة (مثنى مثنى) تتقاطع في نقطة واحدة، ولهذا $\overleftrightarrow{CF}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BE}$ تتقاطع في نقطة واحدة.

لاحظ أن الطريقة الوحيدة التي تجعل مراكز الدوائر الثلاث على استقامة واحدة هي أن تنطبق الأقطار وهذا مستحيل.

تدريبات

1. الأضلاع $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CD},\overleftrightarrow{DA}$ تمثل أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ والذي يقطعها خط مستقيم في النقاط K,L,M,N على الترتيب. أثبت أن

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{AK}{KB}\cdot\frac{DN}{NA}\cdot\frac{CM}{MD}=1$$

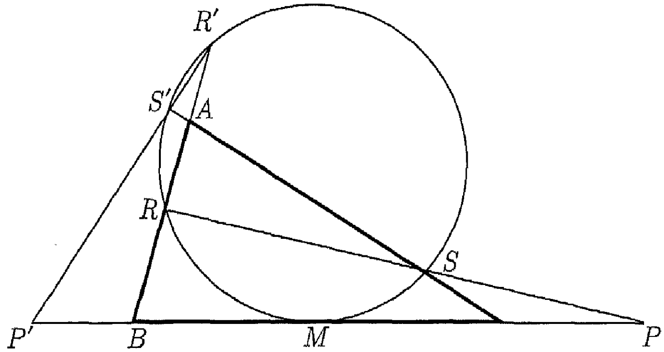
2. في المربع $ABCD$ مددنا الضلع $\overline{AB}$ إلى النقطة P بحيث $BP=2\left(AB\right)$ ، إذا كانت النقطة M منتصف $\overline{BC}$ ، و $\overline{BM},\overline{AC}$ يتقاطعان في Q ، وكذلك $\overline{PQ},\overline{BC}$ يتقاطعان في R . استخدم نظرية منيلوس لتحصل على قيمة النسبة $\frac{CR}{RB}$.

3. في المثلث ABC ، النقطتان P,R تقعان على $\overline{AB},\overline{AC}$ على الترتيب بحيث $\overline{AP}\cong\overline{AR}$. أثبت أن المتوسط $\overline{AM}$ يقسم $\overline{PR}$ إلى قطعتين مستقيمين تتناسبان مع $\overline{AB},\overline{AC}$.

4. أثبت أن مماسات الدائرة المحيطة بالمثلث ABC عند رؤوسه تقطع الضلع المقابل في المثلث في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة .

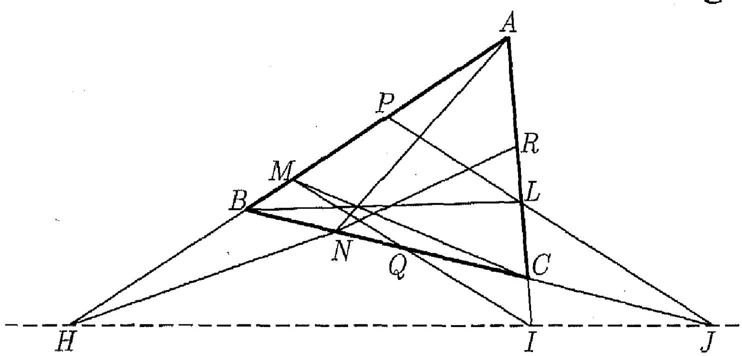
5. أثبت أنه إذا كان الخط المستقيم المار بنقطة تقاطع المتوسطات G في المثلث ABC ويقطع كلاً من $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ في النقطتين M,N على الترتيب فإن $\left(AM\right)\left(NC\right)+\left(AN\right)\left(MB\right)=\left(AM\right)\left(AN\right)$.

6. الدائرة التي تمس الضلع $\overline{BC}$ عند نقطة منتصفه M في المثلث ABC ، تقطع أيضا $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ في S,S',R,R' على الترتيب. إذا مددنا $\overline{RS},\overline{R'S'}$ ليقطعا $\overleftrightarrow{BC}$ في P,P' على الترتيب(انظر الشكل 32 − 3). فأثبت أن $\left(BP\right)\left(BP'\right)=\left(CP\right)\left(CP'\right)$.



شكل 32 – 3

7. في المثلث ABC ، النقاط P, Q, R هي منتصفات الأضلاع $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ على الترتيب ، $\overleftrightarrow{AN}, \overleftrightarrow{BL}, \overleftrightarrow{CM}$ تتقاطع في نقطة واحدة وتقطع الأضلاع المقابلة في N, L, M على الترتيب. إذا كان $\overleftrightarrow{PL}$ يقطع $\overleftrightarrow{BC}$ في النقطة J ، $\overleftrightarrow{MQ}$ يقطع $\overleftrightarrow{AC}$ في النقطة I ، $\overleftrightarrow{RN}$ يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ في النقطة H ، فأثبت أن النقاط H, I, J تقع على استقامة واحدة (انظر الشكل 33 – 3).



شكل 33 – 3

8. إذا التقى المماسان المشتركان الخارجيان للدائرتين O, Q في النقطة M ، والتقى المماسان المشتركان الخارجيان للدائرتين O, S في النقطة N ، والتقى المماسان

المشتركان الخارجيان للدائرتين Q, S في النقطة L ، فأثبت أن M, N, L تقع على استقامة واحدة إذا علمت أن الدوائر الثلاث لا يوجد منها اثنتان متطابقتان ولا يوجد منها اثنتان لهما المركز نفسه.

9. أثبت أن نقاط تقاطع المنصفات العمودية للمنصفات الداخلية لزوايا أي مثلث مع أضلاع المثلث المقابلة لتلك الزوايا تقع على استقامة واحدة.

10. مستخدماً نظرية منيلوس ، قدم برهاناً للتطبيق رقم ٦.

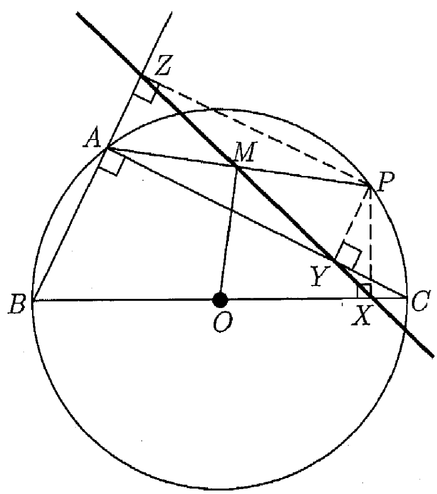
11. وضح كيف تستخدم نظرية براينشون في إثبات وجود نقطة جيرجون في المثلث ؟

12. قارن بين نظريتي بابوس ، وباسكال.

13. اكتب ثم برهن عكس نظرية ديزارغ.

14. اكتب ثم برهن عكس نظرية سيمسون.

15. على الشكل $3-34$ ، $\triangle ABC$ قائم في A ومرسوم داخل دائرة O. خط سيمسون للنقطة P بالنسبة للمثلث ABC يلاقي $\overline{PA}$ في النقطة M. أثبت أن $\overline{MO}$ عمودي على $\overline{PA}$ عند النقطة M.



شكل $3-34$

16. من النقطة P على محيط الدائرة O ، رسمنا ثلاثة أوتار لاقت الدائرة في النقاط A, B, C . أثبت أن الدوائر الثلاث التي أقطارها $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ تتقاطع في ثلاث نقاط تقع على مستقيم واحد.

17. إذا أنشأنا مثلثين داخل دائرة واحدة، ومن نقطة واحدة على الدائرة رسمنا خطي سيمسون لكل من المثلثين. أثبت أن الزاوية المحصورة بين خطي سيمسون هي مقدار ثابت وذلك بغض النظر عن وضع هذه النقطة.

18. أثبت أن القطع المماسة لدائرتين (إذا وجدت)، فإن المحور الأساسي لهاتين الدائرتين ينصفها.

19. أثبت أن المحور الأساسي لدائرتين قطراهما هما قطرا شبه منحرف، يمر بنقطة تقاطع ضلعي شبه المنحرف غير المتوازيين .

20. أثبت أن النقاط الأربع الناتجة من تقاطع مستقيمين قاطعين لدائرتين واللذين هما مرسومان من نقطة تقع على المحور الأساسي لهاتين الدائرتين، تقع على دائرة ثالثة (أي تشكل رؤوس رباعي دائري).

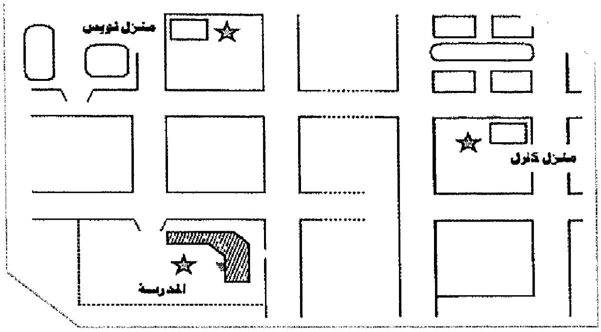
الفصل الرابع

نقاط متماثلة في المثلث

مقدمة

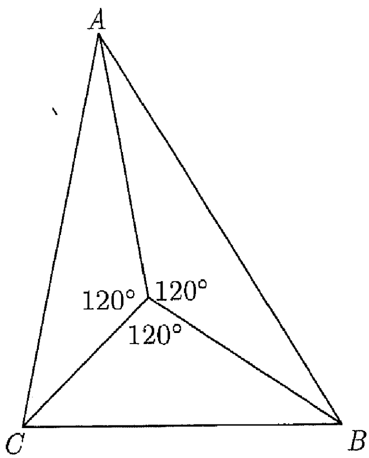
لنفرض أنك وأحد أصدقائك تخططون لإنشاء ملقم كمبيوتر يعمل عن بعد لتخزين المعلومات من كمبيوترك الخاص وكمبيوتر صديقك والكمبيوتر الخاص بالمدرسة، نلاحظ بسهولة أن مواقع هذه الأجهزة تمثل مثلثاً، ولنفرض أن أي زاوية من زواياه لا تزيد عن 120°. حاول باستخدام الخريطة المرفقة (انظر الشكل $0-4$) أن تجد موقعاً أو نقطة مناسبة لهذا الملقم بحيث تكون المسافة بينه و بين كل جهاز كمبيوتر من الثلاثة أقل ما يمكن ، وسوف نطلق على هذه النقطة " نقطة المسافة الصغرى " minimum distance point . تُرى كيف نجد هذه النقطة ؟

في هذا الفصل سوف نطور بعض النظريات التي ستمكننا من حل هذه المشكلة ، وأثناء ذلك سوف نواجه عدداً من النظريات الشيقة والتي تلقي الضوء على بعض الخواص الساحرة للمثلثات.



شكل 0 – 4

نقطة تساوي الزوايا Equiangular point

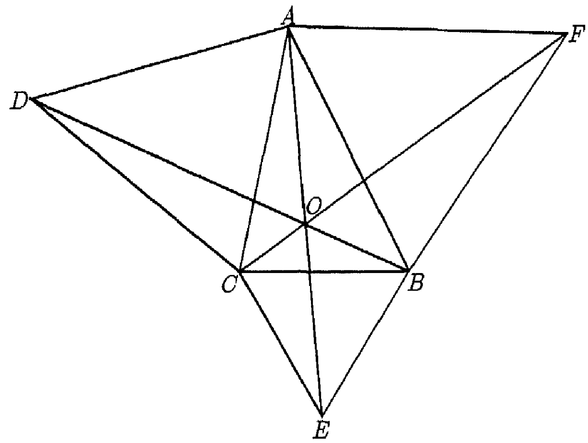


شكل 1 – 4

تُرى كيف لنا أن نحدد النقطة التي تتطابق حولها الزوايا الناتجة من الأشعة الخارجة منها إلى رؤوس المثلث ؟ دعونا نحدد هذه النقطة (انظر الشكل 1 – 4) .

ستكون أول خطواتنا لإيجاد هذه النقطة ذات الخاصية المهمة هو إنشاء مثلثات متطابقة الأضلاع على كل ضلع من أضلاع المثلث من الخارج، ثم قطعاً مستقيمة تصل بين كل رأس خارجية من هذه المثلثات بالرأس المقابلة لها من المثلث الأصلي (انظر الشكل 2 – 4) .

وتقدم النظرية 1 – 4 الخاصية المدهشة للمستقيمات الثلاثة، وبعد إثبات هذه الخاصية سنعود لمسألتنا الأصلية.



شكل 2 – 4

نظرية 4–1 القطع المستقيمة الواصلة بين رؤوس مثلث والرؤوس الخارجية للمثلثات المتطابقة الأضلاع المنشأة على أضلاع هذا المثلث من الخارج متطابقة.

خطة البرهان

أثبت أن $\overline{DB} \cong \overline{AE}$ ، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ عن طريق إثبات أن $\Delta DCB \cong \Delta ACE$ ، ومن ثم أثبت أن $\Delta EBA \cong \Delta CBF$ ●

البرهان

لأن $m\angle DCA = m\angle ECB = 60^\circ$ ، $m\angle DCB = m\angle ACE$ (بالإضافة).

وأيضا ، لأن لدينا مثلثات متطابقة الأضلاع ؛ فإن $DC = AC$ ، وكذلك $CB = CE$ ، إذن $\Delta ACB \cong \Delta ACE\,(SAS)$ ، وهذا يثبت لنا أن : $\overline{DB} \cong \overline{AE}$ ، وبنفس الطريقة نستطيع إثبات أن $\Delta EBA \cong \Delta CBF$. وهذا يمكننا من إثبات أن $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ ومنه $\overline{DB} \cong \overline{AE} \cong \overline{CF}$. ●

من خلال الشكل 2 – 4 ، لعلك لاحظت أن $\overline{DB}, \overline{AE}, \overline{CF}$ تتقاطع جميعها في نقطة واحدة ، وهذه الملاحظة تعطينا النظرية التالية .

نظرية 4–2 القطع المستقيمة الواصلة بين رؤوس مثلث والرؤوس الخارجية للمثلثات المتطابقة الأضلاع المنشأة على أضلاع هذا المثلث من الخارج تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة. (تسمى هذه النقطة نقطة فيرما* Fermat Point للمثلث)

خطة البرهان

أنشئ الدائرة المحيطة لكل مثلث من المثلثات الثلاثة ، وحاول أن تثبت أن الدوائر الثلاثة تتقاطع في النقطة O. القطع المستقيمة الست الخارجة من النقطة O والواصلة إلى النقاط A, B, C, D, E, F ستعين المستقيمات الثلاثة المتقاطعة في نقطة واحدة. ●

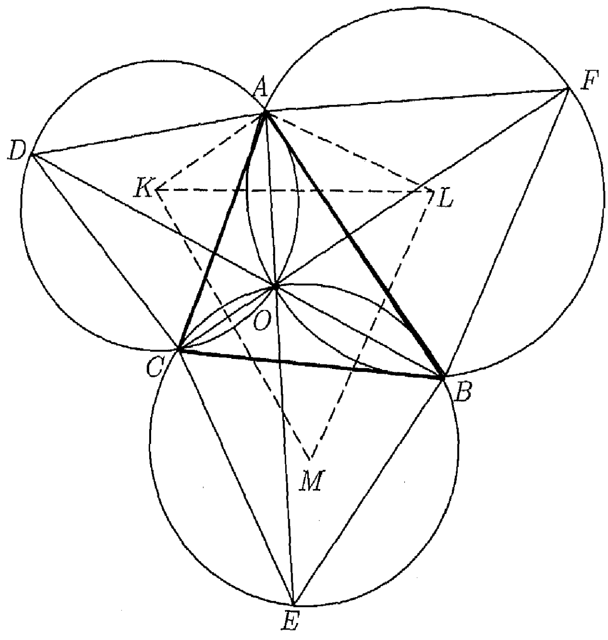
---

* سميت باسم الرياضي الفرنسي بيير دي فيرما Pierre de Fermmat (١٦٠١–١٦٦٥).

البرهان

لنفـرض أن مراكـز الـدوائر الـثلاث المحيطـة بالمثلثـات المتطابقـة الأضـلاع $\Delta ACD, \Delta ABF, \Delta BCE$ هي K, L, M (انظر الشكل $3-4$). الدائرتان K, L تتقاطعان في النقطتين O, A.

$$m\angle AOC = \frac{1}{2}\left(m\widehat{ADC}\right), m\widehat{ADC} = 240^\circ \Rightarrow m\angle AOC = 120^\circ$$



شكل $3-4$

بالمثل $m\angle AOB = \frac{1}{2}\left(m\widehat{AFB}\right) = 120^\circ \Rightarrow m\widehat{COB} = 120$

لأن مجمـــوع قياســـات الزوايـــا المتجمعـــة حـــول نقطـــة = $360°$). ولأن $m\widehat{CEB} = 240°$ فإن $\angle COB$ زاوية محيطية والنقطة O تقع على الدائرة M. ومن هذا نستنتج أن الدوائر الثلاث تتقاطع في نقطة واحدة هي النقطة O.

الآن نصل النقطة O بكل من النقاط A, B, C, D, E, F. وحيث إن :

$m\angle DOA = m\angle AOF = m\angle FOB = 60°$ ، إذن النقاط B, O, D تقع على مستقيم واحد $\overleftrightarrow{DOB}$. بالمثل بالنسبة لكل من $\overleftrightarrow{COF}, \overleftrightarrow{AOE}$. وهذا يثبت أن $\overline{DB}, \overline{AE}, \overline{CF}$ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة هي O. (وهذه النقطة هي أيضاً نقطة تقاطع الدوائر الثلاث K, L, M. ●

والآن هل تستطيع أن تعين موضع النقطة داخل المثلث ABC بحيث تكون الزوايا التي تواجه أضلاع المثلث الثلاثة والمتجمعة حولها متطابقة ؟

لعلك تعرف الآن أنها النقطة O والتي تسمى نقطة تساوي الزوايا Equiangular point للمثلث ABC وذلك لأن :

$$m\angle AOB = m\angle AOC = m\angle BOC = 120°.$$

وقبل أن نكمل بحثنا في موضوع نقطة تساوي الزوايا والتي سوف نعود إليها مرة أخرى خلال هذا الفصل، دعونا نستفد من النظرية التالية، والتي تشير المصادر بأن الذي وضعها هو نابليون بونابرت Napoleon Bonaparte وتظهر هذه النظرية بوضوح موهبته الرياضية والتي كان من نتائجها أن يطلق البعض على المثلث المتطابق الأضلاع مثلث نابليون Napoleon triangle.

نظرية 4-3 مراكز الدوائر المحيطة بالمثلثات المتطابقة الأضلاع المنشأة على أضلاع مثلث من الخارج هي رؤوس مثلث متطابق الأضلاع.

خطة البرهان

أثبت أن أضلاع ΔKLM تتناسب مع $\overline{AE}, \overline{BD}, \overline{CF}$ (أثبتنا سابقاً أن $\overline{DB} \cong \overline{AE} \cong \overline{CF}$). ●

البرهان

في المثلث DAC (انظر الشكل $3-4$)، النقطة K (نقطة تقاطع المتوسطات) تقسم المتوسط أو العمود (لأن المثلث متطابق الأضلاع) بنسبة $2:1$ من جهة الرأس، أي أن AK يساوي ثلثي المتوسط، وباستخدام العلاقات في المثلث الثلاثيني الستيني نحصل على $AC : AK = \sqrt{3} : 1$.

ولأن $m\angle KAC = m\angle LAF = 30°$، وبإضافة $m\angle CAL$ نحصل على $m\angle KAL = m\angle CAF$، وبالتالي نستنتج أن $\Delta KAL \sim \Delta CAF$ والذي يؤدي إلى أن:

$$.CF : KL = CA : AK = \sqrt{3} : 1$$

بالمثل يمكننا إثبات أن:

$$DB : KM = \sqrt{3} : 1, AE : ML = \sqrt{3} : 1$$

$$\Rightarrow DB : KM = AE : ML = CF : KL$$

ولكننا أثبتنا سابقاً أن: $DB = AE = CF$ وهذا يقود إلى أن $KM = ML = KL$، أي أن ΔKML متطابق الأضلاع. ●

من خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع

لعلنا قبل العودة لمشكلة أين يضع لويس وكارل ملقم جهاز الكمبيوتر الخاص بهم، نحتاج لحقيقة مدهشة أخرى عن المثلث المتطابق الأضلاع.

لنرسم مثلثاً كبيراً متطابق الأضلاع ، ونختار أي نقطة تقع داخله، ثم نقيس البعد بين هذه النقطة وكل ضلع من أضلاع المثلث الثلاثة، ونسجل مجموع هذه

الأبعاد. ونكرر هذه الخطوات مع نقطة أخرى تقع داخل نفس المثلث، ونقارن بين المجموعين في كل حالة. ثم لنقس طول ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع.

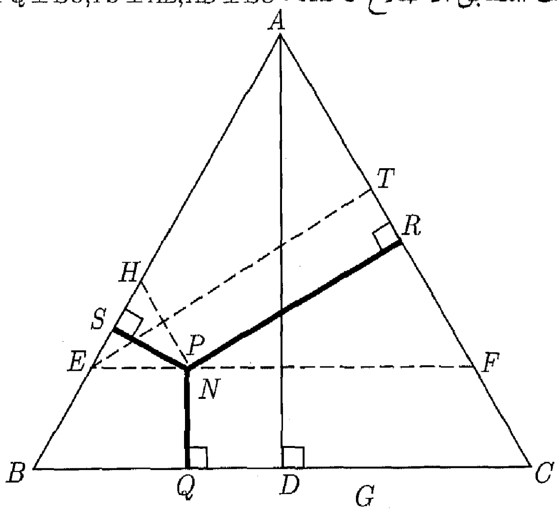
تُرى ما نتيجة المقارنة بين المجموعين وطول ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع ؟ للإجابة عن هذا السؤال نقترح لك النظرية التالية.

نظرية 4-4 مجموع المسافات العمودية من نقطة داخل مثلث متطابق الأضلاع والمرسومة على أضلاع هذا المثلث من الداخل تساوي مقدار ثابت (يساوي طول ارتفاع المثلث).

سنقدم لهذه النظرية المدهشة برهانين مختلفين، الأول منهما سنجزئ ارتفاع المثلث ونقارن بين هذه الأجزاء و المسافات العمودية المرسومة من النقطة إلى أضلاع المثلث. أما البرهان الثاني فسنستخدم فيه مقارنة المساحات.

البرهان I

في المثلث المتطابق الأضلاع ABC ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}, \overline{PS} \perp \overline{AB}, \overline{PQ} \perp \overline{BC}, \overline{PR} \perp \overline{AC}$.



شكل 4 – 4

نرسم مستقيماً يمر بالنقطة P ويوازي $\overline{BC}$ ويقطع كلاً من $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{AC}$ في النقاط G, E, F على الترتيب (انظر الشكل 4 – 4).

لأن الشكل $PGDQ$ مستطيل فإن:

$$PQ = GD$$

لنرسم أيضاً $\overline{ET} \perp \overline{AC}$ ، ولأن المثلث AEF متطابق الأضلاع ، فإن $\overline{AG} \cong \overline{ET}$ (جميع ارتفاعات المثلث المتطابق الأضلاع متطابقة). وأخيراً، لنرسم $\overline{PH} \parallel \overline{AC}$ ليلاقي $\overline{ET}$ في N فنحصل على:

$$\overline{NT} \cong \overline{PR}$$

وحيث إن ΔEHP متطابق الأضلاع وارتفاعيه $\overline{PS}, \overline{EN}$ متطابقان فإن :

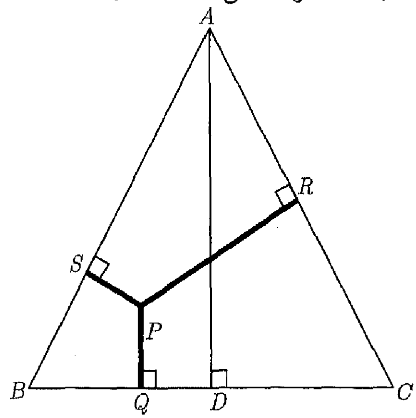
$$PS + PR = ET = AG$$

ولكن $PQ = GD$ ؛ إذن، $AD = AG + GD = PS + PR + PQ$ (ثابت لأي مثلث). ●

البرهان II

في المثلث المتطابق الأضلاع ABC ، $\overline{PR} \perp \overline{AC}, \overline{PQ} \perp \overline{BC}, \overline{PS} \perp \overline{AB}, \overline{AD} \perp \overline{BC}$.

نصل كلاً من $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ (انظر الشكل 5 – 4). ومنه نجد أن :



شكل 5 – 4

$$\left[\Delta ABC\right]= \left[\Delta ABP\right]+ \left[\Delta PBC\right]+ \left[\Delta CPA\right]$$
$$=\frac{1}{2}(AB)(PS)+\frac{1}{2}(BC)(PQ)+\frac{1}{2}(AC)(PR)$$

ولكن $AB = BC = AC$ ؛ إذن :

$$\left[\Delta ABC\right]=\frac{1}{2}(BC)\left[(PS)+(PQ)+(PR)\right]$$

ولكن $\left[\ \Delta ABC\right]=\frac{1}{2}(BC)(AD)$ ، ومن ذلك نجد أن :

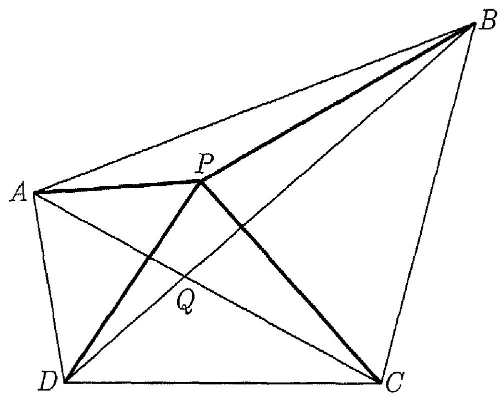
$AD = PS + PR + PQ$ (ثابت لأي مثلث). ●

نقطة المسافة الصغرى

مرة أخرى قبل أن نحل مشكلتنا الأصلية وهي العثور على النقطة التي تبعد أقل مسافة ممكنة عن أضلاع مثلث من الداخل ، دعونا نطرح السؤال التالي : تُرى في أي شكل رباعي ، ما النقطة التي يكون عندها مجموع الأبعاد بين هذه النقطة ورؤوس الرباعي من الداخل أقل ما يمكن ؟

لعل تخمينك المبدئي يكون صحيحاً عندما تظن أن هذه النقطة هي نقطة تقاطع قطري هذا الرباعي ، والتي نطلق عليها نقطة المسافة الصغرى في الشكل الرباعي ، وللتحقق من صحة هذا التخمين دعونا نفترض نقطة أخرى داخل الرباعي غير نقطة تقاطع القطرين ونحصل على مجموع المسافات بينها وبين رؤوسه ونقارنها بمجموع المسافات بين نقطة تقاطع القطرين والرؤوس. وذلك كما يلي :

ليكن $ABCD$ شكلاً رباعياً يتقاطع قطراه $\overline{AC},\overline{BD}$ في النقطة Q ، ولتكن P نقطة اختيارية داخل الرباعي (لا تنطبق على Q) ، (انظر الشكل 6 – 4).



شكل 6 − 4

من متباينة المثلث (مجموع أي ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث) ؛ إذن :

$$PA + PC > QA + QC, PB + PD > QB + QD$$

بالجمع نحصل على :

$$PA + PC + PB + PD > QA + QC + QB + QD$$

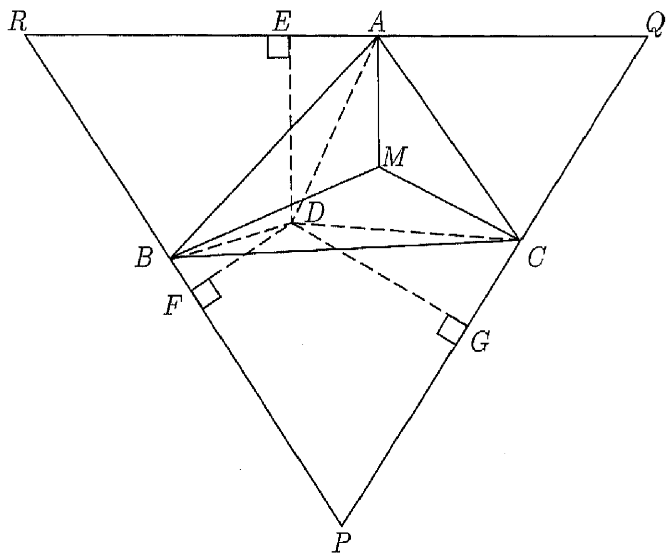
أي أن مجموع المسافات من نقطة تقاطع قطري أي شكل رباعي إلى رؤوس هذا الشكل أقل من مجموع المسافات بين أي نقطة أخرى داخله ورؤوسه. وهذا يمهد لنا الطريق لتقديم النظرية.

نظرية 4−5 نقطة المسافة الصغرى في الشكل الرباعي هي نقطة تقاطع قطريه.

من الطبيعي أن نتساءل أين يجب أن تقع النقطة التي تكون مجموع المسافات منها إلى رؤوس المثلث أقل ما يمكن. وهذا على وجه التحديد ما تطرحه المشكلة التي تصاحبنا من أول الفصل، والتي ربما نسعى الآن للبحث عن نقطة متماثلة لما تم في

حالة الشكل الرباعي ولكن داخل المثلث. بالطبع سنضع في عين الاعتبار نقطة تساوي الزوايا والتي هي بالتأكيد تقدم بعض التماثل داخل المثلث.

ليكن ΔABC ليس به زاوية أكبر من $120°$ ، ولتكن M أي نقطة تقع داخل هذا المثلث بحيث $m\angle AMB = m\angle BMC = m\angle AMC = 120°$. وكما في الشكل $(7-4)$ ،



شكل $7-4$

لنرسم مستقيمات تمر بـ A, B, C وتكون عمودية على $\overline{AM}, \overline{BM}, \overline{CM}$ على الترتيب، وتتقاطع في ثلاث نقاط هي رؤوس المثلث المتطابق الأضلاع PQR (لإثبات أن ΔPQR متطابق الأضلاع، لاحظ أن قياس كل زاوية من زواياه تساوي $60°$ وذلك ناتج من أن الرباعي $AMBR$ – على سبيل المثال – فيه $m\angle AMB = 120°$ $m\angle MAR = m\angle MBR = 90°$ وبالتالي فإن:

$(m\angle ARB = 60^\circ$

لتكن الآن D أي نقطة تقع داخل ΔABC ، وبالتالي فمن نظرية $(4-4)$ فإن:

$$MA + MB + MC = DE + DF + DG$$

(حيث $\overline{DE}, \overline{DF}, \overline{DG}$ أعمدة على $\overline{REQ}, \overline{RBP}, \overline{QGP}$ على الترتيب)، ولكن

$$DE + DF + DG < DA + DB + DC$$

(أقصر بعد بين مستقيم ونقطة تقع خارجة هو البعد العمودي بين هذه النقطة والمستقيم). بالتعويض نجد $MA + MB + MC < DA + DB + DC$.

ربما تتساءل لماذا وضعنا شرط أن المثلث الذي اخترناه لا يجب أن تزيد أي زاوية من زواياه عن 120° ، ولكنك إذا حاولت أن ترسم النقطة M في مثلث إحدى زواياه على سبيل المثال 150° فإنك ستعرف لماذا وضعنا هذا الشرط.

نظرية 4–6 نقطة المسافة الصغرى في مثلث جميع زواياه أقل من 120° ، هي النقطة متساوية الزوايا (أي النقطة التي تضم زوايا متطابقة حولها وتواجه أضلاع المثلث).

نحن الآن مستعدون لحل المشكلة الخاصة باختيار أفضل موقع لكمبيوتر التحكم عن بُعد (أي الموقع الذي تكون عنده المسافات للمنازل أقل ما يمكن ، فبعد رسم مثلث على الخريطة تكون المنازل هي رؤوسه ، عليك أن تنشئ النقطة التي عندها تكون المسافة أقل ما يمكن عن طريق تحديد موضع نقطة متساوية الزوايا داخل ذلك المثلث (والتي هي أيضاً النقطة التي عندها تكون المسافة أقل ما يمكن) بالطريقة التي اتبعناها في نظرية $(1-4)$.

تدريبات

1. أوجد مجموع أطوال الأعمدة الثلاثة المرسومة من أي نقطة تقع داخل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه 10.
2. حدد موضع نقطة تقع داخل مثلث حاد الزوايا بحيث مجموع المسافات التي تبعدها عن رؤوسه أقل ما يمكن.
3. وضح لماذا وضعنا في نظرية $(6-4)$ شرط أن يكون قياس أي زاوية في المثلث أقل من $120°$.
4. إذا كانت إحدى زوايا مثلث أكبر من أو تساوي $120°$ ، فأثبت أن رأس هذه الزاوية هي النقطة التي عندها تكون المسافة أقل ما يمكن.
5. إذا أنشأنا مربعات على أضلاع مثلث من الخارج، فأثبت أن الخط المستقيم المار بمركزي أي مربعين منها يكون عمودياً على الخط المستقيم المار بالرأس المشتركة لهذين المربعين ومركز المربع الثالث.
6. أثبت أكبر المثلثات مساحة بين كل المثلثات التي لها المحيط نفسه هو المثلث المتطابق الأضلاع.
7. أثبت أن أقل المثلثات محيطاً بين كل المثلثات التي لها المساحة نفسها هو المثلث المتطابق الأضلاع.
8. أثبت أن مراكز الدوائر المحيطة بالمثلثات الثلاثة المتشابهة والمنشأة على أضلاع أي مثلث من الخارج هي رؤوس مثلث يشابه هذه المثلثات.
9. أثبت نظرية $(3-4)$ في حالة رسم المثلثات الثلاثة المتطابقة الأضلاع على أضلاع مثلث من الداخل (هذه الحالة تسمى مثلث نابليون الداخلي internal Napoleon

triangle بينما في حالة رسم المثلثات من الخارج كما في نظرية $(3-4)$ فيسمى مثلث نابليون الخارجي external Napoleon triangle).

10. أثبت أن مثلث نابليون الداخلي ومثلث نابليون الخارجي لهما نفس المركز، وأن الفرق بين مساحتيهما يساوي مساحة المثلث الأصلي.

الفصل الخامس

المزيد من خصائص المثلث

مقدمة

تأتي أهمية دراسة خصائص المثلث بالنسبة للطلاب الذين يدرسون الهندسة في المدارس الثانوية من كونها تمثل قاعدة أساسية لدراسة الهندسة الإنشائية. وفي الواقع، بعد إكمال الطلاب مقرر الهندسة في المرحلة الثانوية يشعرون بأنهم قد تعرفوا على كل ما يختص بالمثلثات. ولكن بعد أن وصلنا إلى هذه المرحلة من كتابنا هذا نرى أن ذلك غير صحيح. بالطبع، ستشعر بأنك لا تزال في نطاق المبادئ الأولية للهندسة، ومع ذلك واصل القراءة وشاهد كيف أن بعض الخصائص البسيطة للمثلث هي في الحقيقة ليست عادية.

منصفات الزوايا Angle bisectors

في سنوات دراستنا السابقة، تعرفنا جميعاً على القاعدة التي تقول بأن منصفي زاويتي القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان، وهذا من السهل إثباته. ولكن لا يزال عكس هذه القاعدة مهملاً مع أن هذا العكس أيضا يمثل نظرية صحيحة ولكنها صعبة الإثبات.

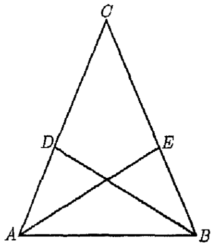
نظرية 5–1 إذا تطابق منصفا زاويتين في مثلث، فإن هذا المثلث يكون متطابق الضلعين.

يعد برهان هذه النظرية من أصعب البراهين في الهندسة الأساسية ؛ ولهذا السبب سنقدم عدداً من البراهين المختلفة والتي لكل منها مزاياه الخاصة.

بداية ، نعيد عرض النظرية على ΔABC.

المعطيات : $\overline{AE}, \overline{BD}$ منصفا زاويتين في ΔABC ، $\overline{AE} \cong \overline{BD}$. (انظر الشكل 1 − 5).

المطلوب : أثبت أن ΔABC متطابق الضلعين.

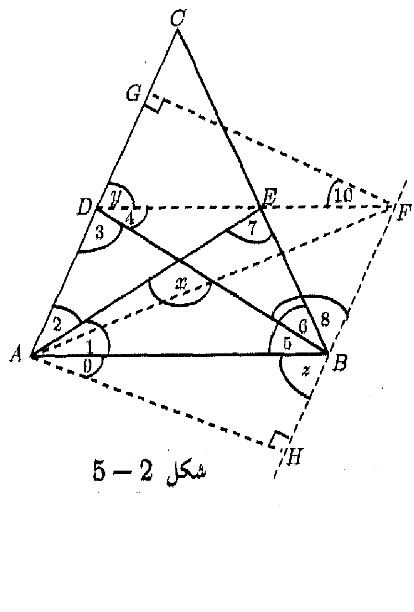


شكل 1 − 5

البرهان I

نرسم $\angle AEB \cong \angle DBF$ بحيث $\overline{BF} \cong \overline{BE}$ ، ثم نصل $\overline{DF}$ (انظر الشكل 2 − 5). ونرسم $\overline{AC} \perp \overline{FG}$, $\overline{AH} \perp \overleftrightarrow{FB}$ في H.

لأن $\overline{AE} \cong \overline{DB}$, $\overline{FB} \cong \overline{EB}$, $\angle 8 \cong \angle 7$ ؛ إذن $\Delta AEB \cong \Delta DBF$ (SAS)، ومنه فإن $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $m\angle 4 = m\angle 1$ ، وأيضاً



شكل 2 − 5

$m\angle x = m\angle 3 + m\angle 2$ (زاوية خارجة عن المثلث)

$m\angle x = m\angle 3 + m\angle 1$ (بالتعويض)

$m\angle x = m\angle 3 + m\angle 4$ (بالتعويض)

$m\angle x = m\angle 7 + m\angle 6$ (زاوية خارجية)

$m\angle x = m\angle 5 + m\angle 7$ (بالتعويض)

$m\angle x = m\angle 5 + m\angle 8$ (بالتعويض)

$\Rightarrow m\angle 5 + m\angle 8 = m\angle 3 + m\angle 4$ (بالتعدي)

$$\Rightarrow m\angle y = m\angle z$$

$$\Delta FDG \cong \Delta ABH \Rightarrow FG = AH, DG = BH$$

$$\Delta AFG \cong \Delta FAH \Rightarrow AG = FH$$

ومن ذلك نستنتج أن الشكل $GFHA$ متوازي أضلاع . أي أن :

$m\angle 10 = m\angle 9 \Rightarrow \angle DAB = \angle DFB$ (بالطرح)

ولكن $m\angle DFB = m\angle EBA$ (من $\Delta DBF, \Delta AEB$). بالطرح نحصل على :

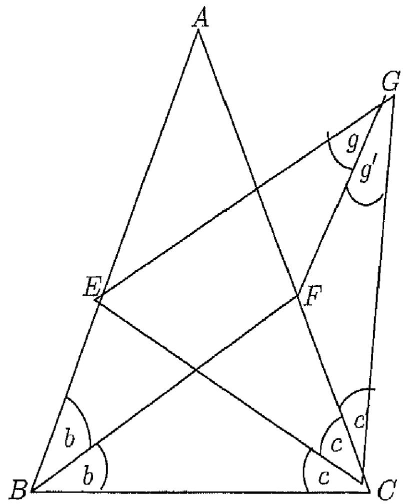
$m\angle DAB = m\angle EBA$ (بالتعدي)

أي أن ΔABC متطابق الضلعين . ●

البرهان II (غير مباشر)

نفرض أن ΔABC غير متطابق الضلعين ، ولتكن $m\angle ABC > m\angle ACB$ (انظر الشكل 3 – 5) ، باستخدام المعطى $\overline{BF} \cong \overline{CE}, \overline{BC} \cong \overline{BC}$

و $CF > BE$ *. ومن النقطة F ننشئ $\overline{GF} \parallel \overline{EB}$ ومن النقطة E ننشئ $\overline{GE} \parallel \overline{BF}$ ، ومن ذلك نحصل على متوازي الأضلاع $BFGE$ الذي فيه



شكل 3 − 5

$\overline{BF} \cong \overline{EG}, \overline{EG} \cong \overline{CE}$ ، وبالتالي يكون $\Delta\, GEC$ متطابق الضلعين.

$$\Rightarrow m\angle\left(g+g'\right) = m\angle\left(c+c'\right)$$

ولدينا

$$m\angle\left(g\right) = m\angle\left(b\right) \Rightarrow m\angle\left(b+g'\right) = m\angle\left(c+c'\right)$$

ولأن

$$m\angle b > m\angle c$$

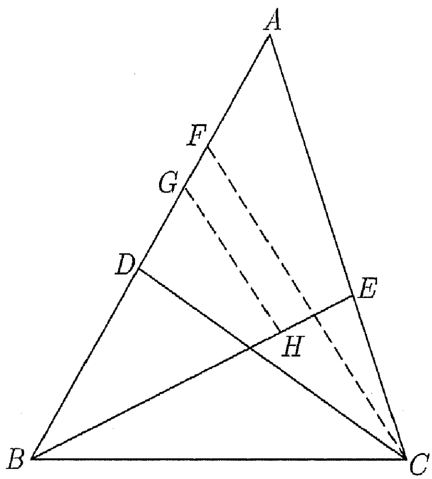
* إذا طابق ضلعان في مثلث نظيريهما في مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الآخر ، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الآخر.

(من الفرض)، نجد أن $m\angle g' < m\angle c'$. وباستعمال المتباينة الأخيرة في ΔGFC ، نصل إلى أن $CF < GF$ ، ولكن $GF = BE$ ، إذن $CF < BE$.
وبالعودة للمتباينة $m\angle ABC > m\angle ACB$ التي فرضناها أولاً، نحصل على التناقض التالي :

$$CF < BE,\ CF > BE$$

لذا فإن ΔABC متطابق الضلعين . ●

البرهان III (غير مباشر)



شكل 4 – 5

في ΔABC ، $BE = DC$ حيث BE, DC منصفا الزاويتين ABC, ACB على الترتيب (انظر الشكل 4 – 5). نفرض أن $m\angle ABC < m\angle ACB$ ، ثم نرسم $\angle FCD \cong \angle ABE$.

لاحظ أننا نستطيع وضع النقطة F بين رأسي المثلث A,B دون أن نفقد العمومية. في ΔFBC ، $FB > FC$ (إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما أيضاً يكونان مختلفين في الطول، حيث يكون الضلع الأكبر في الطول مواجهاً للزاوية الكبرى في القياس).

لنختر النقطة G بحيث $\overline{BG} \cong \overline{FC}$ ثم نرسم $\overline{GH} \parallel \overline{FC}$ ، وعليه:

$$\angle BGH \cong \angle BFC$$
$$\Rightarrow \Delta BGH \cong \Delta CFD \qquad (SAS)$$

ومن التطابق تستنتج أن $BH = DC$ ولكن $BH < BE$ ومنه $DC > BE$ وهذا يناقض المعطى الخاص بأن منصفي الزاويتين متساويان في الطول أي أنه يستحيل أن تكون $m\angle ABC < m\angle ACB$. وبنفس الطريقة يمكننا إثبات أنه من المستحيل أيضاً أن تكون $m\angle ABC > m\angle ACB$ مما يؤدي إلى أن:

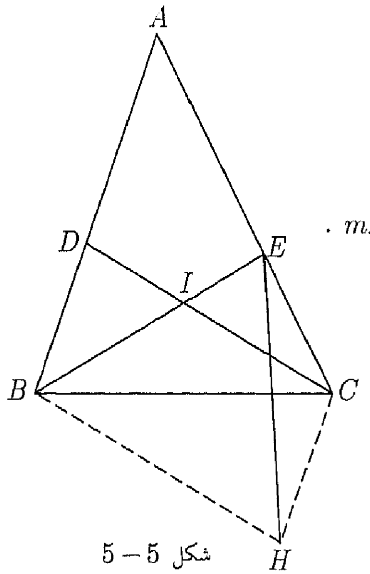
$$m\angle ACB = m\angle ABC$$

أي أن ΔABC متطابق الضلعين . ●

البرهان *IV* (غير مباشر)

في ΔABC ، نفرض أن $m\angle B > m\angle C$ ، $\overline{BE} \cong \overline{DC}$ حيث BE, DC منصفا الزاويتين ABC, ACB على الترتيب. نرسم $\overline{BH} \parallel \overline{DC}, \overline{CH} \parallel \overline{DB}$ فنحصل على متوازي الأضلاع $DCHB$ كما في الشكل $5-5$. إذن $\overline{BH} \cong \overline{BE} \cong \overline{DC}$ ، و ΔBHE متطابق الضلعين.

وعليه فإن:



شكل 5 – 5

$$m\angle BEH = m\angle BHE \qquad (\mathrm{I})$$

ومن الفرض $m\angle B > m\angle C$ لدينا

. $m\angle CBE > m\angle BCD,\ CE > DB$

ولأن $BH = DC$ ، فإن $CE > CH$ ،

وهذا يؤدي إلى أن

$$.\, m\angle CHE > m\angle CEH \qquad (\mathrm{II})$$

في $\triangle CEH$ ، بجمع $(\mathrm{II}),(\mathrm{I})$ ، نحصل على $m\angle BHC > m\angle BEC$ ، ولأن الشكل $DCHB$ متوازي أضلاع ؛ فإن $m\angle BHC = m\angle BDC$ ، ثم بالتعويض نحصل على :

$$m\angle BDC > m\angle BEC$$

وفي $\Delta DBI, \Delta ECI$ ،

لدينا

$$m\angle DIB = m\angle EIC$$

ولأن $m\angle BDC > m\angle BEC$ ، نجد :

$$m\angle DBI < m\angle ECI$$

وبمضاعفة المتباينة الأخيرة نحصل على $m\angle B < m\angle C$ ، وهذا يناقض الفرض الذي فرضناه أولاً $(m\angle B > m\angle C)$ ، وبنفس الطريقة إذا بدأنا بفرض أن

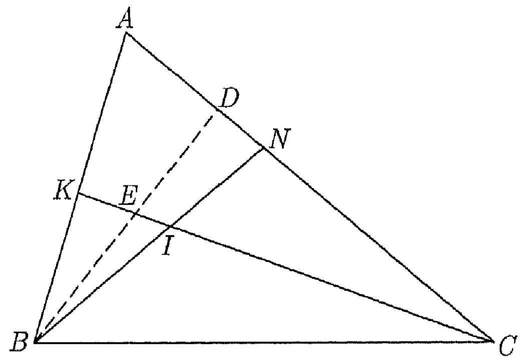
$m\angle B > m\angle C$ ، فإننـــا نحـــصل علـــى نفـــس التنـــاقض ممـــا يـــؤدي إلى أن

$m\angle ACB = m\angle ABC$

أي أن ΔABC متطابق الضلعين . ●

نظرية 5–2 إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فإن منصف الزاوية الكبرى يكون أقل طولاً من منصف الزاوية الثانية.

البرهان



شكل 6 – 5

المثلث ABC فيه: $m\angle ABC > m\angle ACB$ ، BN, CK منصفا الزاويتين ABC, ACB على الترتيب ويتقاطعان في النقطة I ، نرسم $\overline{BD}$ بحيث $m\angle DBN = m\angle ACK$ ويقطع $\overline{CK}$ في النقطة E (انظر الشكل 6 – 5).

$$\Rightarrow \Delta DBN \sim \Delta DCE \qquad \text{(AA)}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CE} \qquad \text{(I)}$$

ومن جهة ثانية ، لدينا المعطى $m\angle ABC > m\angle ACB$ ؛ إذن :

$$\frac{1}{2}m\angle ABC > \frac{1}{2}m\angle ACB \quad or \quad m\angle NBC > m\angle BCK$$

ولكن $m\angle DBN = m\angle ACK$ ، وبالجمع نحصل على :

$.m\angle DBC > m\angle DCB$

في المثلث DBC ، لدينا $BD < CD$ ، ومن $\left(\text{I}\right)$ أعلاه نجد $BN < CE$ الذي يقود إلى أن :

$$BN < CK$$

وهو المطلوب إثباته . ●

نظرية 5–3 قياس الزاوية المحصورة بين منصفين داخليين لزاويتين في مثلث يساوي مجموع قياس زاوية قائمة ونصف قياس الزاوية الثالثة .

البرهان

BN, CM منصفا زاويتين في المثلث ABC ، يتقاطعان في النقطة I (انظر الشكل $5-7$). وفي ΔBIC : $m\angle BIC = 180° - m\angle IBC - m\angle ICB$

$$\Rightarrow m\angle BIC = 180° - \left[\frac{1}{2}\left(m\angle ABC\right) + \frac{1}{2}\left(m\angle ACB\right)\right]$$

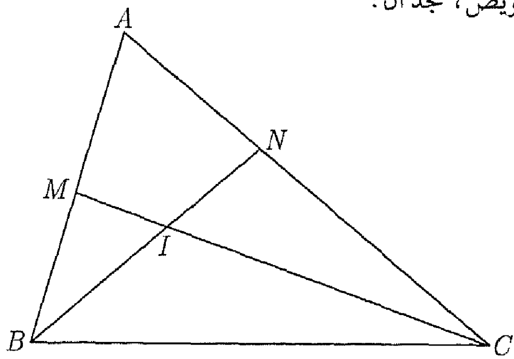
ولكن :

$$m\angle ABC + m\angle ACB = 180° - m\angle A$$

أي أن

$$\frac{1}{2}\left(m\angle ABC\right)+\frac{1}{2}\left(m\angle ACB\right)=90^\circ-\frac{1}{2}\left(m\angle A\right)$$

بالتعويض ، نجد أن :



شكل 7 − 5

$$m\angle BIC=180^\circ-\left[90^\circ-\frac{1}{2}\left(m\angle A\right)\right]=90^\circ+\frac{1}{2}\left(m\angle A\right)$$

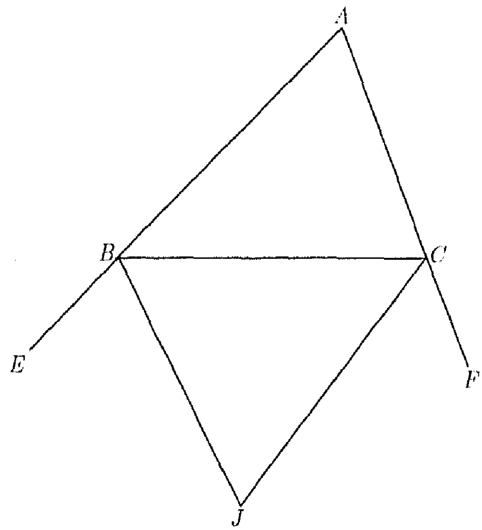
وهو المطلوب إثباته . ●

يعتبر التطوير المنطقي لنظرية 3 − 5 هو الحديث عن المنصفات الخارجية للزوايا وهو ما نقدمه في نظرية 4 − 5.

نظرية 5–4 قياس الزاوية المحصورة بين المنصفين الخارجيين لزاويتين في مثلث يساوي الفرق بين قياس زاوية قائمة ونصف قياس الزاوية الثالثة.

البرهان

اعتبر BJ, CJ المنصفين الخارجيين لزاويتين في المثلث ABC يتقاطعان في النقطة J ، (انظر الشكل 8 − 5).



شكل 8 − 5

$$m\angle BJC = 180^\circ - \frac{1}{2}m\angle EBC - \frac{1}{2}m\angle FCB$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - m\angle ABC\right) - \frac{1}{2}\left(180^\circ - m\angle ACB\right)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}m\angle ABC - 90^\circ + \frac{1}{2}m\angle ACB$$

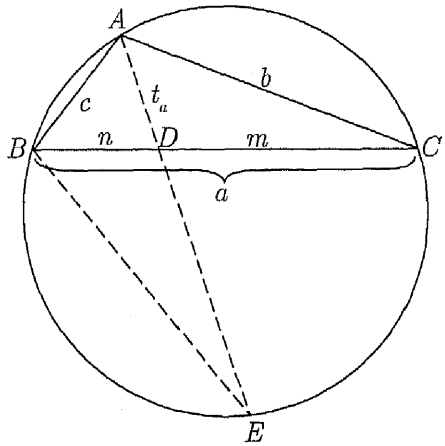
$$= \frac{1}{2}\left(m\angle ABC + m\angle ACB\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(180^\circ - m\angle A\right)$$

$$\bullet .\, m\angle BJC = 90^\circ - \frac{1}{2}m\angle A$$

لاستكمال دراستنا لمنصفات الزاوية، علينا أن نناقش موضوع طول منصف الزاوية في المثلث وعلى وجه التحديد، سنسعى لإيجاد علاقة بين طول منصف الزاوية وأضلاع المثلث (أو أجزاء من هذه الأضلاع) .وهذه العلاقة هي فحوى النظرية $5-5$.

نظرية 5–5 مربع طول المنصف الداخلي لأي زاوية في أي مثلث يساوي حاصل ضرب طولي ضلعي هذه الزاوية مطروحاً منه حاصل ضرب جزئي الضلع الثالث الذي يقسمه منصف الزاوية.



شكل $9-5$

البرهان

في الشكل $(9-5)$، $\overline{AD}$ (أو t_a) منصف للزاوية BAC، نمد $\overline{AD}$ ليقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC في النقطة E، نصل $\overline{BE}$. لأن

$m\angle BAD = m\angle CAD$ ، و $m\angle E = m\angle C$ (زاويتـان محيطيتـان مرسـومتان على نفس القوس). إذن :

$$\Delta ABE \sim \Delta ADC \qquad or \qquad \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB}$$

ومنه فإن :

$$(AC)(AB) = (AD)(AE) = (AD)(AD + DE) = (AD)^2 + (AD)(DE) \qquad (\mathrm{I})$$

ولكن

$$(AD)(DE) = (BD)(DC) \qquad (\mathrm{II})$$

بالتعويض من (II) في (I) :

$$(AC)(AB) = (AD)^2 + (BD)(DC)$$

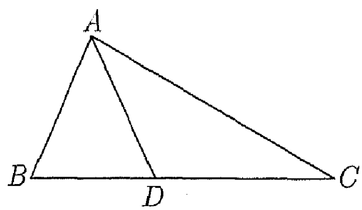
$$\Rightarrow (AD)^2 = (AC)(AB) - (BD)(DC) \Rightarrow t_a^{\,2} = bc - mn. \bullet$$

والآن، نرى كيف يوضح التطبيق التالي استخدام النظرية السابقة.

التطبيق 1

إذا كان طولا الضلعين الأقصر والمتوسط في مثلث هما 9,18 ، وطول منصف الزاوية المرسوم إلى الضلع الأطول في المثلث يساوي 8. أوجد طول الضلع الأطول في المثلث.

الحل



شكل 10 – 5

ليكن $AB = 9, AC = 18$ ، ومنصف الزاوية $AD = 8$ (انظر الشكل $10 - 5$).

لأن $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ ، يمكننا أن نفرض أن $BD = m = x \Rightarrow DC = n = 2x$

من النظرية $(5 - 5)$ ، لدينا :

$$t_a^{\,2} = bc - mn \quad or \quad (AD)^2 = (AC)(AB) - (BD)(DC)$$
$$\Rightarrow (8)^2 = (18)(9) - 2x^2 \Rightarrow x = 7 \quad \Rightarrow \quad BC = 3x = 21. \bullet$$

لنفرض أن $\overline{AD}$ في التطبيق السابق ليست منصفاً لزاوية في المثلث، وأنها مجرد قطعة مستقيمة تصل بين رأس من رؤوس المثلث والضلع المقابل لها وأننا نريد معرفة طولها، تُرى كيف لنا أن نحل هذه المشكلة ؟

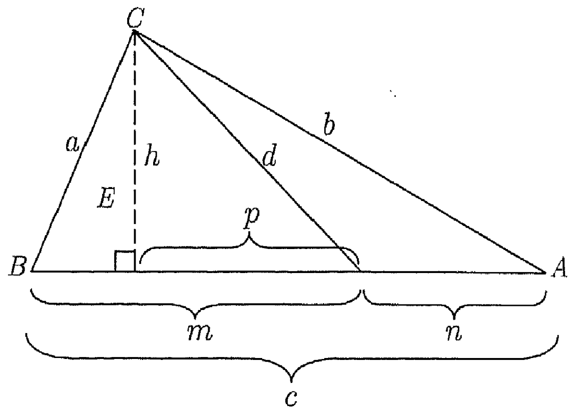
الحقيقة أننا نحتاج لحل هذه المسألة إلى معلومات إضافية. ولمعرفة هذه المعلومات الإضافية الضرورية، واصل القراءة.

نظرية ستيوارت Stewart's theorem

مشكلتنا الأساسية هنا هي إيجاد طول أي قطعة مستقيمة تصل بين رأس مثلث والضلع المقابل لهذه الرأس، أي أنه على سبيل المثال، في المثلث ABC (شكل $11 - 5$) نحن نعلم طول كل من $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AD}, \overline{BD}$ ونريد أن نعلم طول $\overline{CD}$.

كان أول من حل هذه المشكلة وقدمها في محاضراته هو الرياضي الأسكتلندي الشهير روبرت سيمسون Robert Simson ، وقد سمح لتلميذه ماثيو ستيوارت Matthew Stewart بنشرها في مطبوعته الشهيرة " General theorems of considerable use in the higher parts of mathematics" (أدنبره ١٧٤٦). وقد كان الدافع وراء سخاء سيمسون هذا هو رغبته في حصول ستيوارت على كرسي الأستاذية في جامعة أدنبره، وقد نجح

في ذلك. ومن المثير أن نلاحظ كيف تم إعطاء الفضل لسيمسون في نظرية لم يكتشفها (نظرية 7 – 3) في حين أن النظرية التي اكتشفها هو لم تنسب إليه. وسوف نشير إلى نظرية 6 – 5 باسم كاتبها (ستيوارت)في الكتاب الذي ظهرت به.



شكل 11 – 5

وفي الحقيقة يستحق سيمسون تقديراً خاصاً لكتابه الهام "العناصر لإقليدس The Elements of Euclid- جلاسجو ١٧٥٦" والذي لأكثر من – ١٥٠ عاما – قام بنشره العديد من الناشرين، حيث يعد هو القاعدة الرئيسة لدراسة كتاب العناصر لإقليدس وكذلك هو أحد المراجع الرئيسية اليوم لمقرر الهندسة في المرحلة الثانوية في الولايات المتحدة الأمريكية.

وسنعرض أولاً نظرية ستيوارت وإثباتها ثم نقدم عليها بعض التطبيقات .

نظرية 5–6 (**نظرية ستيوارت**) باستخدام دلالات الرموز المحددة في الشكل $(5-11)$ تتحقق العلاقة التالية

$$a^2n + b^2m = c\left(d^2 + mn\right)$$

البرهان

في $\triangle ABC$ ، ليكن $BC = a, AC = b, AB = c, CD = d$ ، والنقطة D تقسم $\overline{AB}$ إلى $BD = m, DA = n$. نرسم الارتفاع $CE = h$ ، ونفرض أن $ED = p$.

من أجل المضي قدماً في برهان نظرية ستيوارت، علينا أن نستنتج صيغتين، نحصل على الأولى منهما بالعمل على $\triangle CBD$. باستخدام نظرية فيثاغورس على $\triangle CEB$ نحصل على

$$(CB)^2 = (CE)^2 + (BE)^2$$

وبوضع $BE = m - p$ نحصل على :

$$a^2 = h^2 + (m-p)^2 \qquad \text{(I)}$$

وباستخدام نظرية فيثاغورس على $\triangle CED$ نحصل على : $h^2 = d^2 - p^2$

بالتعويض عن قيمة h^2 في (I) :

$$\begin{aligned} a^2 &= d^2 - p^2 + (m-p)^2 \\ &= d^2 - p^2 + m^2 - 2mp + p^2 \\ &= d^2 + m^2 - 2mp \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

وللحصول على الصيغة الثانية سنعمل على $\triangle CDA$. بتطبيق نظرية فيثاغورس على $\triangle CEA$ ، نحصل على $(CA)^2 = (CE)^2 + (EA)^2$ وبوضع $EA = n + p$ نحصل على :

$$b^2 = h^2 + (n+p)^2 \qquad \text{(III)}$$

بالتعويض عن قيمة $h^2 = d^2 - p^2$ في (III) نجد أن :

$$b^2 = d^2 - p^2 + (n+p)^2$$
$$= d^2 - p^2 + n^2 - 2np + p^2$$
$$= d^2 + n^2 - 2np \qquad (IV)$$

عند ضرب المعادلة (II) في n والمعادلة (IV) في m نحصل على الصيغتين اللتين نبحث عنهما في بداية البرهان .

$$a^2n = d^2n + m^2n - 2mnp \qquad (V)$$
$$b^2m = d^2m + n^2m + 2mnp \qquad (VI)$$

بجمع $(VI), (V)$:

$$a^2n + b^2m = d^2n + d^2m + m^2n + n^2m + 2mnp - 2mnp$$
$$\Leftrightarrow a^2n + b^2m = d^2(n+m) + mn(m+n)$$

ولكن : $c = m + n$ ، إذن $a^2n + b^2m = d^2c + mnc$ الذي يكافئ

$$a^2n + b^2m = c(d^2 + mn) \; .\bullet$$

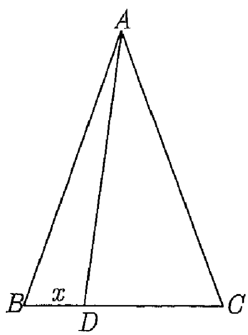
التطبيق 2

على الشكل $12-5$ ، المثلث ABC فيه $AB = AC = 17$ ، والنقطة D تقع على $\overline{BC}$ بحيث طول DC يزيد عن طول DB بمقدار 8. فإذا كان $AD = 16$ ، فأوجد طول كل من DC, DB.

الحل

ليكن $BD = x, DC = x + 8$

باستخدام نظرية ستيوارت :



شكل $12-5$

$$\left(AB\right)^2\left(DC\right)+\left(AC\right)^2\left(BD\right)=BC\left[\left(AD\right)^2+\left(BD\right)\left(DC\right)\right]$$

إذن، $\left(17\right)^2\left(x+8\right)+\left(17\right)^2\left(x\right)=\left(2x+8\right)\left[\left(16\right)^2+x\left(x+8\right)\right]$

$\Rightarrow x=3\Rightarrow BD=3, DC=11$. ●

التطبيق 3

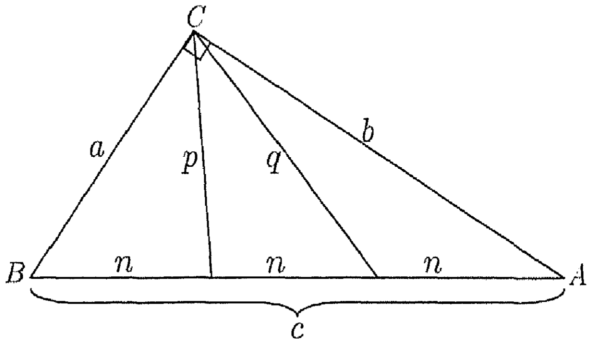
أثبت أن مجموع مربعي القطعتين المستقيمتين الخارجتين من رأس الزاوية القائمة في المثلث القائم إلى النقطتين اللتين تقسمان الوتر إلى ثلاثة أجزاء متطابقة يساوي خمسة أتساع مربع الوتر.

البرهان

بتطبيق نظرية ستيوارت على اعتبار أن p,q طولا القطعتين المستقيمتين الداخليتين في المثلث (انظر شكل 13 – 5) نجد أن:

$$2a^2n+b^2n=c\left(p^2+2n^2\right) \qquad (\mathrm{I})$$

$$a^2n+2b^2n=c\left(q^2+2n^2\right) \qquad (\mathrm{II})$$



شكل 13 – 5

بجمع $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$:

$$3a^2n+3b^2n=c\left(4n^2+p^2+q^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3n\left(a^2+b^2\right)=c\left(4n^2+p^2+q^2\right)$$

ولكن من نظرية فيثاغورس $c^2=a^2+b^2$ ؛ إذن :

$$3n\left(c^2\right)=c\left(4n^2+p^2+q^2\right)$$

وبما أن $c=3n$ ، فلدينا :

$$c^2=\left(2n\right)^2+p^2+q^2$$

ولكن $2n=\frac{2}{3}c$ ، ومنه نحصل على :

$$c^2=\left(\frac{2}{3}c\right)^2+p^2+q^2$$ أو $$p^2+q^2=c^2-\left(\frac{2}{3}c\right)^2=\frac{5}{9}c^2.$$ ●

التطبيق 4

لتوضيح مدى أهمية وقوة نظرية ستيوارت دعونا نستخدمها في إثبات النظرية $1-5$ *، وهذه الطريقة المباشرة تأخذ تلك النظرية البسيطة وتضعها (مؤقتاً) في موضع أكثر تقدماً في تطوير الهندسة الإقليدية.

البرهان *

نعلم أن المطلوب هو إثبات أن $b=c$. ولذا ليكن كل من $\overline{BE},\overline{CD}$ منصفين لزاويتين من زوايا ΔABC، بحيث $BE=CD=x$ (الشكل $14-5$)، ومنصف الزاوية يقسم الضلع المقابل لهذه الزاوية إلى جزأين يتناسبان مع الضلعين الآخرين وذلك كما يلي

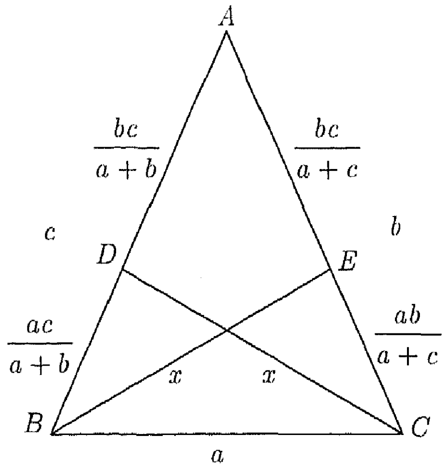
$$BD=\frac{ac}{a+b} \qquad \mathrm{A}D=\frac{bc}{a+b} \qquad AE=\frac{bc}{a+c} \qquad CE=\frac{ab}{a+c}$$

بتطبيق نظرية ستيوارت مرتين على ΔABC نحصل على المعادلتين

$$a^2\frac{bc}{a+c}+c^2\frac{ab}{a+c}=b\left(x^2+\frac{bc}{a+c}\cdot\frac{ab}{a+c}\right)$$

$$a^2\frac{bc}{a+b}+b^2\frac{ac}{a+b}=c\left(x^2+\frac{bc}{a+b}\cdot\frac{ac}{a+b}\right)$$

* هذا البرهان تم تقديمه من قبل الرياضي جان سيوانوز Jan Siwanowicz.



شكل $5-14$

بحل المعادلتين بالنسبة للمتغير x^2 نحصل على :

$$x^2 = ac - \frac{ab^2c}{\left(a+c\right)^2} = ab - \frac{abc^2}{\left(a+b\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow c + \frac{bc^2}{\left(a+b\right)^2} = b + \frac{b^2c}{\left(a+c\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow c\left(1 + \frac{bc}{\left(a+b\right)^2}\right) = b\left(1 + \frac{bc}{\left(a+c\right)^2}\right) \qquad (I)$$

الآن، إذا كانت $b > c$ ، فلأن $a, b, c > 0$ ، فإن :

$$\left(1 + \frac{bc}{\left(a+b\right)^2}\right) < \left(1 + \frac{bc}{\left(a+c\right)^2}\right)$$

ومنه فإن (I) لا يمكن أن تتحقق. وكذلك، إذا كانت $b < c$ ، فإن :

$$\left(1+\frac{bc}{(a+b)^2}\right) > \left(1+\frac{bc}{(a+c)^2}\right)$$

ومرة أخرى، فإن (I) لا يمكن أن تتحقق. إذن، $b = c$. ●

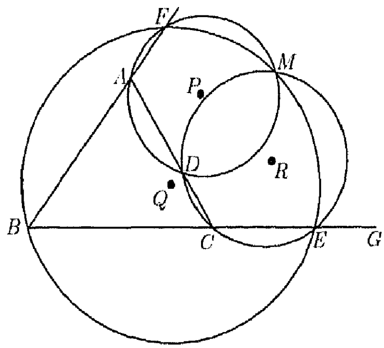
نظرية مايكل Miquel's theorem

ربما تريد أن تجري هذه التجربة، علماً بأنه من المهم تنفيذ ذلك باستخدام أدوات هندسية. ارسم أي مثلث، اختر نقطة على كل ضلع من أضلاعه، ثم ارسم ثلاث دوائر بحيث تمر كل دائرة بنقطتين من تلك النقاط كما تمر برأس المثلث المحصورة بين ضلعيه اللذين يحويان النقطتين. والآن ما العلاقة التي تلاحظها حول الدوائر الثلاث؟

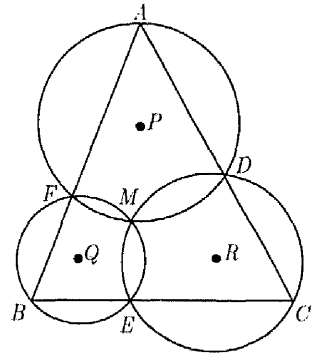
ستقودنا ملاحظتك تلك لنظرية قدمها مايكل A. Miquel في العام ١٨٣٨ والتي نصها وبرهانها كما يلي

نظرية 5-7 (**نظرية مايكل**) إذا اخترنا نقطة على كل ضلع من أضلاع مثلث، فإن كل دائرة من الدوائر الثلاث التي تعينها نقطتان من هذه النقاط والرأس المجاورة لهما من رؤوس المثلث تشترك جميعها في نقطة واحدة.

هذه النظرية يمكن أن يتم تطبيقها بطريقتين، أولاهما الشكل المتوقع كما يظهر في الشكل $15-5$، أما الشكل الآخر فتتحقق أيضاً عليه النظرية ونحصل عليه عند اختيار نقطتين من النقاط الثلاث على امتداد أضلاع المثلث والذي يظهر في الشكل $16-5$.



شكل 16 – 5



شكل 15 – 5

البرهان

الحالة الأولى (النقطة M تقع داخل ΔABC) : كما يتضح في الشكل 17 – 5 ، فإن النقاط D, E, F تقع على الترتيب على الأضلاع $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$ في ΔABC ، والنقاط F, B, E تقع على الدائرة Q كما أن النقاط D, C, E تقع على الدائرة R ، وتتقاطع الدائرتان في النقطة M . نصل كلاً من $\overline{FM}, \overline{ME}, \overline{MD}$. في الرباعي الدائري

$$m\angle FME = 180^\circ - m\angle B \ : \ BFME$$

وفي الرباعي الدائري

$$m\angle DME = 180^\circ - m\angle C \ : \ CDME$$

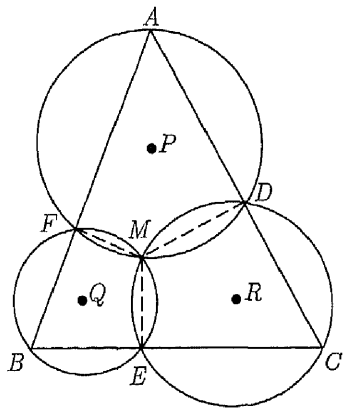
بالجمع :

$$m\angle FME + m\angle DME = 360^\circ - \left(m\angle B + m\angle C\right)$$

$$\Rightarrow m\angle FMD = m\angle B + m\angle C = 180^\circ - m\angle A$$

إذن الشكل $AFMD$ رباعي دائري، وهذا يثبت أن النقطة M هي نقطة تقاطع الدوائر الثلاث.

الحالة الثانية (النقطة M تقع خارج ΔABC) : على الشكل $18-5$ ، مرة أخرى، لتكن النقطة M هي نقطة تقاطع الدائرتين Q, R. في الرباعي الدائري $BMFE$:



شكل $17-5$

$$m\angle FME = 180^\circ - m\angle B$$

وبالمثل في الرباعي الدائري

$$m\angle DME = 180^\circ - m\angle C : CDME$$

بالطرح :

$$m\angle FMD = m\angle FME - m\angle DME = m\angle DCE - m\angle B \qquad \text{(I)}$$

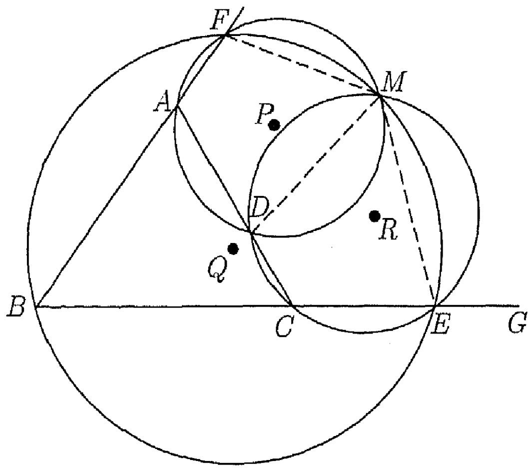
ولكن :

$$m\angle DCE = m\angle BAC + m\angle B \qquad \text{(II)}$$

من $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$:

$$m\angle FMD = m\angle BAC = 180^\circ - m\angle FAD$$

إذن الشكل $ADMF$ رباعي دائري، وهذا يثبت أن النقطة M هي نقطة تقاطع الدوائر الثلاث .●



شكل 18 – 5

تسمى النقطة M نقطة مايكل Miquel point للمثلث ABC والنقاط F, D, E تعين ما يسمى بمثلث مايكل Miquel triangle، كما تفتح هذه النظرية باباً جديداً للعديد من النظريات الإضافية والتي سنعرض بعضاً منها هنا.

نظرية 5–8 القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة مايكل للمثلث ورؤوس مثلث مايكل تُشكل زوايا متطابقة بالنسبة لأضلاع المثلث الأصلي.

البرهان

لأن الشكل $AFMD$ رباعي دائري (انظر الشكلين $18-17{,}5-5$)، فإن $m\angle AFM$ تكمل $m\angle ADM$ ، ولكن : $m\angle CDM$ تكمل $m\angle ADM$ ؛ إذن :

$$\angle CDM \cong \angle AFM \text{ ومنه } \angle BFM \cong \angle ADM$$

ولاستكمال البرهان نطبق نفس الخطوات على الشكل الرباعي الدائري $CDNE$. ●

نقول عن مثلث إنه منشأ على مثلث آخر إذا كانت رؤوس المثلث الأول تقع على أضلاع المثلث الآخر، وعليه دعونا نقدم النظرية التالية

نظرية 5–9 المثلثان المنشآن على مثلث واحد ولهما نفس نقطة مايكل متشابهان .

البرهان

ليكن : $\Delta DFE, \Delta D'F'E'$ لهما نفس نقطة مايكل (انظر الشكل $19-5$).

من النظرية

$8-5$ ، نجد أن :

$$\angle MFB \cong \angle MDA,\ \angle MF'A \cong \angle MD'C$$

إذن ،

$$\Delta MF'F \sim \Delta MD'D$$

وبالمثل

$$\Delta MD'D \sim \Delta ME'E$$

إذن :

$$\angle FMF' \cong \angle DMD' \cong \angle EME'$$

بالجمع نحصل على :

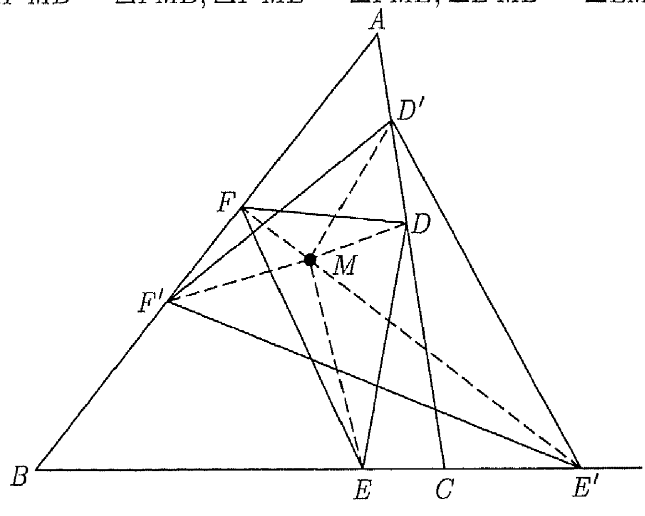
$$\angle F'MD' \cong \angle FMD, \angle F'ME' \cong \angle FME, \angle E'MD' \cong \angle EMD$$

وأيضاً من تشابه المثلثات السابق نحصل على :

$$\frac{MF}{MF'} = \frac{MD}{MD'} = \frac{ME}{ME'}$$

ولأن المثلثين يتشابهان إذا كان زوجان من الأضلاع المتناظرة في كل منهما يتناسبان بالإضافة لتطابق الزاويتين المحصورتين بين هذين الضلعين في كل مثلث ، فإن :

$\Delta F'MD' \sim \Delta FMD, \Delta F'ME' \sim \Delta FME, \Delta E'MD' \sim \Delta EMD$ ؛ إذن



شكل 19 − 5

$$\frac{F'D'}{FD} = \frac{F'M}{FM}, \ \frac{F'E'}{FE} = \frac{F'M}{FM} \Rightarrow \frac{F'D'}{FD} = \frac{F'E'}{FE}$$

وبالمثل

$$\frac{E'D'}{ED} = \frac{F'E'}{FE}$$

وهذا يثبت أن $\Delta DEF \sim \Delta D'E'F'$ لأن الأضلاع المتناظرة متناسبة .●

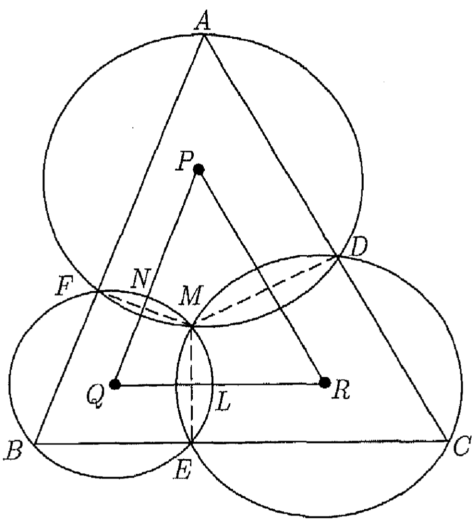
نظرية 5–10 مراكز دوائر مايكل للمثلث تعين مثلثاً آخر يشابه المثلث الأصلي.

البرهان

نرسم الأوتار المشتركة $\overline{FM}, \overline{EM}, \overline{DM}$. $\overline{PQ}$ يقطع الدائرة Q في النقطة N ، $\overline{RQ}$ يقطع الدائرة R في النقطة L (انظر الشكل 20 – 5). بما أن الخط الواصل بين مركزي دائرتين هو العمود المنصف للوتر المشترك لهاتين الدائرتين، أي أن $\overline{PQ}$ العمود المنصف للوتر المشترك $\overline{FM}$ ومن ذلك نستنتج أن :

$m\widehat{FN} = m\widehat{NM}$ ، وبالمثل $m\widehat{ML} = m\widehat{LE}$

والآن :



شكل 20 – 5

$$m\angle NQL = \left(m\widehat{NM} + m\widehat{ML}\right) = \frac{1}{2}\left(m\widehat{FE}\right), \quad m\angle FBE = \frac{1}{2}\left(m\widehat{FE}\right)$$

$$\Rightarrow m\angle NQL = m\angle FBE$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $m\angle QPR = m\angle BAC$ ، وهذا يثبت أن $\Delta PQR \sim \Delta ABC$. ●

من الشيق أن تطبق هذه الدراسة التمهيدية لنظرية مايكل على المثلث المتطابق الأضلاع، والمثلثات القائمة الزاوية، ثم ترى هل هناك أي استنتاجات جديدة يمكن استخلاصها ؟

المتوسطات Medians

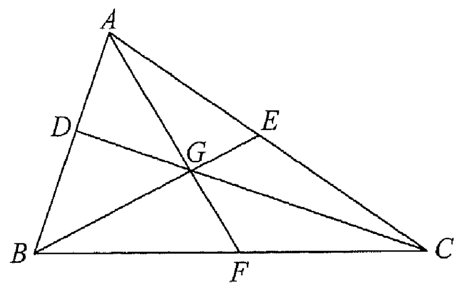
عندما نسأل طالباً متميزاً يدرس الهندسة في المرحلة الثانوية عن خصائص المتوسطات في المثلث، فإنه سيجيب سريعاً بأن نقطة تقاطع المتوسطات (مركز ثقل المثلث) تقسم المتوسط بنسبة $2:1$ من جهة الرأس. ومن المحتمل أيضاً أن يذكر أن متوسط المثلث يقسمه لمثلثين متساويين في المساحة ، وهذه الخاصية من السهل توسعتها للوصول إلى أن متوسطات المثلث الثلاثة تقسم المثلث إلى ستة مثلثات متساوية في المساحة وكنا في الفصل الثاني من كتابنا هذا قد أثبتنا باستخدام نظرية شيفا أن متوسطات المثلث تتقاطع في نقطة واحدة. وبالتأكيد أيضا يمكننا تطبيق نظرية ستيوارت على المتوسطات في المثلث، ولكن هناك عدد من الخصائص الجديرة بالاهتمام لا تعد نتائج مباشرة لهذه النظرية.

وستكون أول مهماتنا في هذا الجزء من الكتاب هي دراسة علاقة أطوال المتوسطات في المثلث مع أطوال أضلاع المثلث، فباستخدام الأدوات الهندسية سنرسم مثلثاً مختلف الأضلاع ونرسم متوسطاته الثلاثة، والآن هل لك أن تخمن أي هذه

المتوسطات الأكبر طولاً وأيها الأقصر؟ قم بقياس المتوسطات باستخدام الأدوات الهندسية. تُرى هل كان تخمينك صحيحاً؟ والآن إذا علمت أطوال أضلاع هذا المثلث، فهل تستطيع أن ترتب متوسطاته حسب أطوالها دون قياس أطوالها؟ هذا ما ستدلنا عليه النظرية التالية.

نظرية 5–11 في أي مثلث، أقصر المتوسطات يقابل أطول الأضلاع.

البرهان



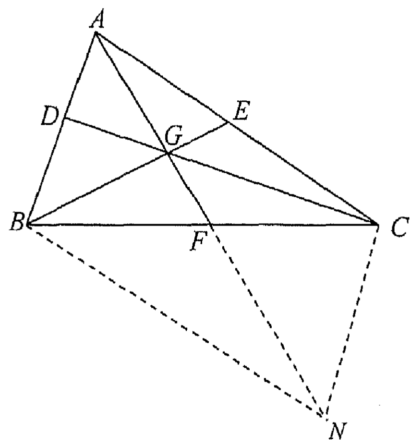
شكل 21 − 5

نفرض أن $AC > AB$ وعليه سنحاول أن نثبت أن $BE < CD$. (انظر الشكل 21 − 5). في $\Delta AFC, \Delta AFB$ ضلعان متساويان وضلع مشترك ($CF = BF$، AF ضلع مشترك). ولأن $AC > AB$، فإن $m\angle AFC > m\angle AFB$، وكذلك $\Delta GFC, \Delta GFB$ فيهما ضلعان متساويان وضلع مشترك ($CF = BF$، GF ضلع مشترك). ولأن $m\angle AFC > m\angle AFB$، فإن $GC > GB$. ولأن نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة $2:1$ من جهة الرأس: إذن، $DC > BE$. ●

نستطيع إيجاد طول المتوسط باستخدام نظرية ستيوارت، ونعلم من نظرية 11 – 5 العلاقة بين أطوال المتوسطات وأطوال أضلاع المثلث. وفي النظريتين التاليتين نعرض بعض العلاقات الشيقة والتي تتحدث عن مجموع أطوال المتوسطات في المثلث.

نظرية 5–12 مجموع أطوال متوسطات أي مثلث أقل من طول محيطه.

البرهان



شكل 22 – 5

عندما نرسم $N \in \overrightarrow{AF}$ بحيث $AF = FN$ فإننا نحصل على متوازي الأضلاع $ABNC$، وهذا يؤدي إلى $AC = BN$. في ΔABN، $AN < AB + BN$. إذن:

$$2(AF) < AB + AC \quad \text{أو} \quad 2m_a < c + b$$

بالمثل يمكن إثبات أن:

$$2m_c < a + b, 2m_b < a + c$$

وبالجمع نجد أن :

$$2m_a + 2m_b + 2m_c < 2c + 2b + 2a$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c < c + b + a. \bullet$$

نظرية 5–13 مجموع أطوال متوسطات أي مثلث أكبر من ثلاثة أرباع طول محيطه.

البرهان

مرة أخرى سنستخدم خاصية أن نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة $2:1$ من جهة الرأس، في ΔABC (انظر الشكل 21 – 5).

$$BG + CG > BC$$

$$\frac{2}{3}(m_c) + \frac{2}{3}(m_b) > a$$

بالمثل :

$$\frac{2}{3}(m_b) + \frac{2}{3}(m_a) > c \text{ ، } \frac{2}{3}(m_c) + \frac{2}{3}(m_a) > b$$

بالجمع :

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > a + b + c \text{ أو}$$

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c). \bullet$$

النظريتان السابقتان تفيدان أن $\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c$.

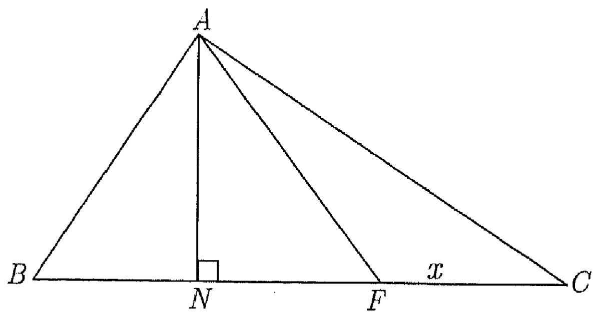
والآن لنناقش مربعات أطوال المتوسطات في المثلث.

نظرية 5–14 ضعف مربع طول المتوسط في المثلث يساوي مجموع مربعي ضلعي المثلث المحيطين بنفس المتوسط مطروحاً منه نصف مربع طول الضلع الثالث من نفس المثلث.

البرهان

بتطبيق نظرية ستيوارت على ΔABC (انظر الشكل 23 – 5) نحصل على :

$$(AB)^2(FC)+(AC)^2(BF)=(BF+FC)\left[(AF)^2+(BF)(FC)\right]$$



شكل 23 – 5

نفرض أن $FC = BF = x$ ، إذن :

$$x(AB)^2 + x(AC)^2 = 2x\left[(AF)^2 + x^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (AB)^2 + (AC)^2 = 2\left[(AF)^2 + x^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 2(AF)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2x^2$$

بوضع $x = \frac{1}{2}(BC)$ ، نحصل على :

$$2(AF)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - \frac{1}{2}(BC)^2 \quad ●$$

ربما لا نُقدِّر أهمية النظرية السابقة حتى نرى كيف تساعدنا في التعرف على بعض الخواص المفيدة المهمة والتي تعتبر نظرية 15 − 5 واحدة منها.

نظرية 5–15 مجموع مربعات أطوال المتوسطات في أي مثلث يساوي ثلاثة أرباع مجموع مربعات أطوال أضلاع هذا المثلث .

البرهان

لإثبات هذه النظرية سنستخدم ما توصلنا إليه في نظرية $(14-5)$ وذلك كما يلي

$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2$$

$$2m_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{1}{2}b^2$$

$$2m_c^2 = b^2 + a^2 - \frac{1}{2}c^2$$

بالجمع :

$$2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) . \bullet$$

نستطيع الاستعانة بالعلاقة السابقة للحصول على علاقة بين مربعات القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع المتوسطات ورؤوس المثلث ومربعات أطوال أضلاع المثلث. وهذا ما تقدمه النظرية التالية.

نظرية 5–16 مجموع مربعات القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع المتوسطات ورؤوس المثلث تساوي ثلث مجموع مربعات أطوال أضلاع هذا المثلث .

البرهان

نعلم أن طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع المتوسطات والرأس تساوي ثلثي طول المتوسط ، ومن ذلك نحصل على :

$$\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$$

ومن نظرية $(5-15)$ التي تنص على أن :

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

نجد أن :

$$\bullet. \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

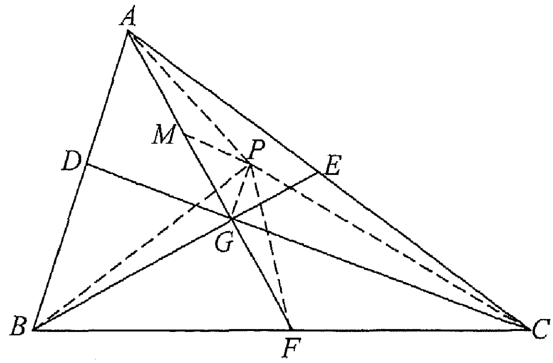
تعد النظرية التالية أكثر عمومية من سابقتها ، حيث إنها تتعلق بأي نقطة تقع في مستوى مثلث والقطع المستقيمة الخاصة بهذا المثلث (أضلاعه ومتوسطاته).

نظرية 5–17

إذا كانت النقطة P تقع في مستوى ΔABC الذي تتقاطع متوسطاته في النقطة G فإن

$$(AP)^2+(BP)^2+(CP)^2=$$
$$(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2+3(PG)^2$$

(انظر الشكل 24 – 5).



شكل 24 – 5

البرهان

نأخذ النقطة M منتصف $\overline{AG}$ (انظر الشكل 24 – 5)، ثم نطبق نظرية 14 – 5 كالتالي

$$\Delta PBC : 2(PF)^2=(PB)^2+(CP)^2-\frac{1}{2}(BC)^2 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\Delta PAG : 2(PM)^2=(AP)^2+(PG)^2-\frac{1}{2}(AG)^2 \qquad (\mathrm{II})$$

$$\Delta PMF : 2\left(PG\right)^2 = \left(PM\right)^2 + \left(PF\right)^2 - \frac{1}{2}\left(MF\right)^2 \qquad \text{(III)}$$

ولكن :

$$MF = \frac{2}{3}\left(AF\right) \quad , \quad AG = \frac{2}{3}\left(AF\right)$$

إذن :

$$.\, MF = AG$$

بالتعويض في $\left(\text{III}\right)$ والضرب في 2 نحصل على :

$$4\left(PG\right)^2 = 2\left(PM\right)^2 + 2\left(PF\right)^2 - \left(AG\right)^2 \qquad \text{(IV)}$$

بجمع $\left(\text{I}\right),\left(\text{II}\right),\left(\text{IV}\right)$:

$$2\left(PF\right)^2 + 2\left(PM\right)^2 + 4\left(PG\right)^2 = \left(PB\right)^2 + \left(AP\right)^2 + 2\left(PM\right)^2$$
$$+\left(CP\right)^2 + \left(PG\right)^2 + 2\left(PF\right)^2 - \frac{1}{2}\left(BC\right)^2 - \frac{1}{2}\left(AG\right)^2 - \left(AG\right)^2$$

أو

$$\left(AP\right)^2 + \left(BP\right)^2 + \left(CP\right)^2 - 3\left(PG\right)^2 = \frac{3}{2}\left(AG\right)^2 + \frac{1}{2}\left(BC\right)^2 \qquad \text{(V)}$$

سنكرر بالمثل نفس الخطوات السابقة بالنسبة للمتوسط $\overline{BE}$ وعندها نحصل على

$$\left(AP\right)^2 + \left(BP\right)^2 + \left(CP\right)^2 - 3\left(PG\right)^2 = \frac{3}{2}\left(BG\right)^2 + \frac{1}{2}\left(AC\right)^2 \qquad \text{(VI)}$$

وبالنسبة للمتوسط $\overline{CD}$

$$\left(AP\right)^2 + \left(BP\right)^2 + \left(CP\right)^2 - 3\left(PG\right)^2 = \frac{3}{2}\left(CG\right)^2 + \frac{1}{2}\left(AB\right)^2 \qquad \text{(VII)}$$

بجمع $\left(\text{IIV}\right),\left(\text{IV}\right),\left(\text{V}\right)$ ، نجد أن :

$$3\left[(AP)^2+(BP)^2+(CP)^2-3(PG)^2\right]=\frac{3}{2}\left[(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[(AB)^2+(BC)^2+(AC)^2\right] \qquad \text{(VIII)}$$

والآن سنطبق نظرية 14 – 5 على ΔABC :

$$(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2=\frac{1}{3}\left[(BC)^2+(AC)^2+(AB)^2\right]$$
$$\Leftrightarrow 3\left[(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2\right]=(AB)^2+(BC)^2+(AC)^2$$

بالتعويض في (VIII)

$$3\left[(AP)^2+(BP)^2+(CP)^2-3(PG)^2\right]=\frac{3}{2}\left[(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[3\left[(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2\right]\right]$$
$$\Rightarrow 3\left[(AP)^2+(BP)^2+(CP)^2-3(PG)^2\right]=3\left[(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2\right]\bullet.$$
$$\Leftrightarrow (AP)^2+(BP)^2+(CP)^2=(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2+3(PG)^2$$

وهكذا يقدم لنا موضوع المتوسطات العديد من العلاقات الشيقة التي سنقدم المزيد منها الآن ونترك الباقي كتدريبات.

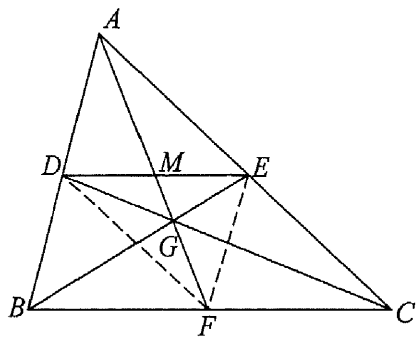
نظرية 5–18 في أي مثلث، متوسط المثلث و القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي الضلعين المحيطين بهذا المتوسط، ينصف كل منهما الآخر.

البرهان

سنحاول إثبات المطلوب عن طريق رسم $\overline{DF},\overline{EF}$ ، القطعتين الواصلتين بين منتصفات الأضلاع في المثلث ABC (انظر الشكل 25 – 5). عندها نحصل على

متوازي الأضلاع $ADFE$ (كل ضلعين فيه متقابلين متوازيان) ، والذي قطراه $\overline{AF}, \overline{DE}$ ينصف كل منهما الآخر. من المعروف أن نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث هي نوعاً ما بمثابة نقطة توازن في المثلث، دعونا نختبر

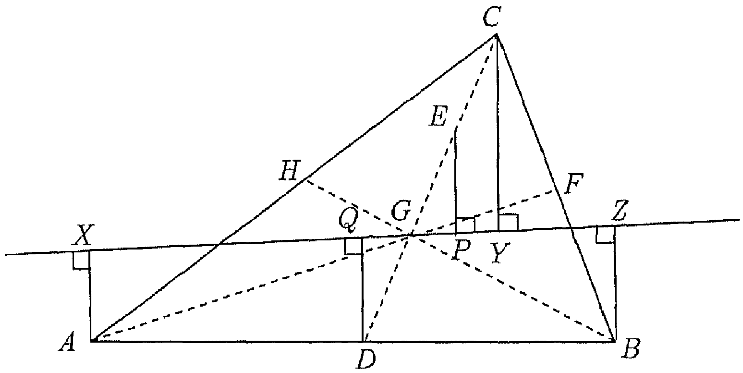
هذه الخاصية في النظرية التالية



شكل 25 – 5

نظرية 5–19 في أي مثلث ABC. اعتبر خطاً مستقيماً $\overleftrightarrow{XYZ}$ ماراً بنقطة تلاقي المتوسطات G. ارسم من رؤوس المثلث أعمدة على هذا المستقيم تقطعه في X, Y, Z كما في الشكل 26 – 5. إن $CY = AX + BZ$

البرهان



شكل 26 − 5

نرسم متوسطات المثلث $\overline{AF}, \overline{BH}, \overline{CD}$ ، (انظر الشكل 26 − 5)، ونرسم $XZ \perp EP$ حيث E منتصف $\overline{CG}$ ؛ ومن ذلك نستنتج أن $CE = EG = GD$.
وأخيراً نرسم $DQ \perp XZ$ ، ولأن $\overline{AX} \parallel \overline{BZ} \parallel \overline{QD}$ (أعمدة على مستقيم واحد)، فإن $\overline{DQ}$ قاعدة متوسطة لشبه المنحرف $ZBAX$. إذن :

$$QD = \frac{1}{2}\left(AX + BZ\right)$$. ولكن $$EP = \frac{1}{2}CY$$

(خواص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث). ومن كون

$$\Delta QGD \cong \Delta PGE$$

نحصل على :

$$QD = EP$$

إذن :

● $\frac{1}{2}\left(AX+BZ\right)=\frac{1}{2}CY$ الذي يكافئ $CY=AX+BZ$.

من الشيق أن تلاحظ أنه يوجد عدد غير منته من المثلثات التي تحيط بها دائرة واحدة ولها نقطة تقاطع متوسطات واحدة تقع داخل هذه الدائرة ، وسوف تكون هذه الخاصية هي نظريتنا التالية ، نظرية $20-5$.

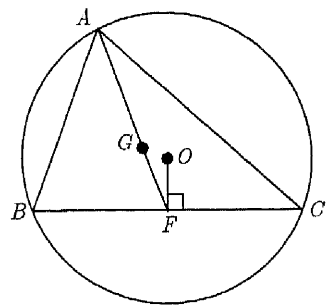
نظرية 5–20 يوجد عدد غير منته من المثلثات التي تحيط بها دائرة واحدة ولها نقطة تقاطع متوسطات واحدة تقع داخل هذه الدائرة.

البرهان

ستكون طريقة برهان هذه النظرية مختلفة نوعاً ما عن الطرق التي كنا نستخدمها في برهان النظريات السابقة ، فلعرض برهان وجود عدد غير منته من المثلثات بالشروط اللازمة والموضحة في نص النظرية ، فإننا سنعمل على إثبات وجود مثلث يتم اختياره عشوائياً، وهذا سيعني وجود عدد غير منته من المثلثات التي يمكن إنشاؤها بصورة مشابهة.

لتكن O دائرة داخلها نقطة G تمثل نقطة تلاقي المتوسطات لجميع المثلثات التي نريد إنشاءها. وسنبدأ باختيار أي نقطة تقع على الدائرة O ولتكن A والتي ستكون أحد رؤوس ΔABC (انظر الشكل $27-5$)، نصل النقطة A بنقطة تقاطع المتوسطات G ، ونمد $\overline{AG}$ حتى النقطة F بحيث $GF=\frac{1}{2}\left(AG\right)$. نرسم الآن $\overline{OF}$ ، ومن النقطة F ننشئ عموداً على $\overline{OF}$ يقطع الدائرة في B,C. وهذا يبرهن ببساطة أنه يوجد مثلث يحقق الشروط اللازمة في النظرية ، ولكن لأن النقطة A

اختيارية، والخطوات التالية لاختيارها لا تعتمد على موقعها، فهناك عدد غير منته من المثلثات يمكن إنشاؤها بنفس الطريقة وتحت نفس الشروط، وبهذا يكون برهاننا قد اكتمل. ●



شكل 27 – 5

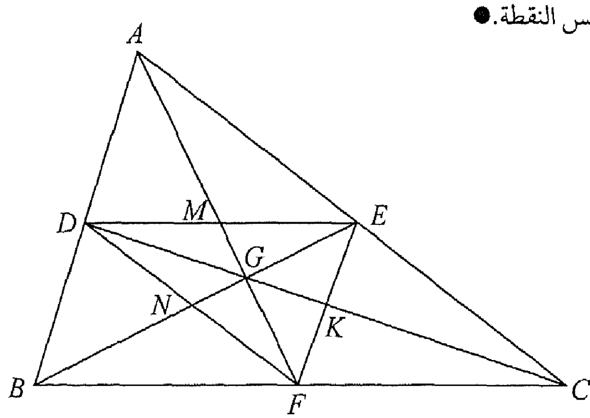
سوف تتضمن دراستنا لموضوع المتوسطات في المثلث نظرة سريعة على ما يسمى بالمثلث المتوسط mediam triangle ، والذي ينتج من القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي مثلث.

نظرية 5–21 المثلث والمثلث المتوسط له لهما نفس نقطة تقاطع المتوسطات.

البرهان

في ΔABC ، المتوسط $\overline{AF}$ ينصف $\overline{DE}$ في النقطة M (نظرية 18 – 5).
إذن $\overline{FM}$ متوسط في ΔDEF (انظر الشكل 28 – 5). بالمثل $\overline{DK}, \overline{EN}$ أيضاً متوسطان في ΔDEF ، وكذلك هذه المتوسطات هي أيضا متوسطات ΔABC .

ولأن متوسطات ΔABC تتقاطع في النقطة G ، فإن متوسطات ΔDEF تتقاطع في نفس النقطة.●



شكل $5-28$

بنظرة سريعة على هذا الفصل ، نجد أننا قد بدأنا بدراسة منصفات زوايا المثلث ، ثم انتقلنا للقطعة المستقية الخارجة من رأس المثلث إلى ضلع المثلث المقابل لهذه الرأس وأهمية ذلك في نظرية ستيوارت ، ثم أخيراً درسنا خصائص المتوسطات في المثلث ، وهذا بالتأكيد أثرى معلوماتك كثيراً حول المثلثات.

تدريبات

1. برهن أن مجموع مقلوبات أطوال منصفات الزوايا الداخلية للمثلث أكبر من مجموع مقلوبات أطوال أضلاع هذا المثلث.
2. برهن أن مساقط الأعمدة الأربعة المرسومة من زاوية رأس مثلث للمنصفين الداخليين والخارجيين للزاويتين الباقيتين من المثلث تقع جميعها على استقامة واحدة.

3. برهن أن الفرق بين قياسي الزاويتين الناتجتين من تقاطع منصف زاوية في مثلث والضلع المقابل لها يساوي الفرق بين قياسي زاويتي المثلث الباقيتين.
4. برهن أن قياس الزاوية المحصورة بين المنصف الخارجي لزاوية في مثلث والضلع المقابل لها يساوي نصف الفرق بين قياسي زاويتي المثلث الباقيتين.
5. في مثلث ثلاثيني ستيني طول وتره 4 ، أوجد البعد بين رأس الزاوية القائمة ونقطة تقاطع منصفات الزوايا للمثلث .
6. منصف الزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية يقسم الوتر لقطعتين مستقيمين طولهما $3, 4$ أوجد طول منصف الزاوية الحادة الكبرى في المثلث القائم.
7. استخدم نظرية ستيوارت للحصول على طول متوسطات مثلث بدلالة أطوال أضلاعه.
8. برهن أن أي مثلثين يتقاطع كل ضلعين من أضلاعهما عند نقطة تقاطع كل دائرتين من دوائر مايكل الثلاث متشابهان .
9. برهن أن المثلثين المتشابهين المنشأين على نفس المثلث لهما نفس نقطة مايكل.
10. باستخدام الشكل $17-5$ أثبت أن : $m\angle BMC = m\angle BAC + m\angle FED$.
11. أثبت أنه إذا تقاطعت ثلاث دوائر في نقطة واحدة M ، فإنه يوجد على الأقل ثلاثة مثلثات متشابهة تكون النقطة M هي نقطة مايكل لها.
12. أثبت أنه إذا أنشئ مثلث بحيث كانت أطوال أضلاعه هي أطوال متوسطات مثلث آخر، فإن طول كل متوسط من متوسطات المثلث المنشأ يساوي ثلاثة أرباع طول كل ضلع من أضلاع المثلث الآخر.
13. أثبت أن مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه هي أطوال متوسطات مثلث آخر تساوي ثلاثة أرباع مساحة المثلث الآخر.

14. أثبت أنه إذا كان هناك نقطتان على أبعاد متساوية من نقطة تقاطع المتوسطات في مثلث ، فإن مجموع مربعات أبعادهما عن رؤوس المثلث متساوية.

15. أثبت أن الخط المستقيم المار بمنتصف متوسط مثلث وبأحد رأسي المثلث الآخرين (اللتين لا يخرج منهما المتوسط) يقسم ضلع المثلث المقابل لهذه الرأس إلى جزأين طول أحدهما نصف طول الآخر.

16. أثبت أن متوسطات المثلث تقسمه إلى ستة مثلثات متساوية في المساحة.

17. أثبت أن الخطوط المستقيمة المارة برؤوس مثلث والتي كل منها يوازي ضلع المثلث المقابل له ، هي أضلاع مثلث آخر ، يكون المثلث الأصلي مثلثاً متوسطاً له.

18. أثبت أنه في أي مثلث قائم الزاوية في C : $\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2}$. ثم أثبت العكس.

19. أثبت أنه في أي مثلث قائم الزاوية في C : $5m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$. ثم أثبت العكس.

الفصل السادس

الأشكال الرباعية

لقد بدأنا دراستنا للأشكال الرباعية في نهاية مقرر الهندسة في المرحلة الثانوية، وقبل ذلك كانت معظم دراستنا للأشكال الرباعية تتحدث عن الأشكال الخاصة منها، مثل أشباه المنحرف، ومتوازيات الأضلاع، والمعينات، والمستطيلات والمربعات. ولكننا هنا في هذا الجزء من الكتاب سنلقى نظرة على الشكل الرباعي في صورته العامة والتي لا تحمل أي خاصية مميزة، ثم ننظر للشكل الرباعي الدائري وهو الشكل الرباعي الذي تقع رؤوسه على دائرة.

الآن لنرسم أي شكل رباعي، ثم نحدد نقاط منتصفات أضلاعه. بالطبع ستكون الأدوات الهندسية مفيدة جداً في تجربتنا تلك. ماذا تتوقع أن يبدو الشكل الناتج ؟

لأجل الإجابة ، صل نقاط المنتصف التي حددتها بين كل ضلعين متتاليين، ثم لاحظ الشكل الرباعي الناتج، وستكون ملاحظتك ببساطة هي النظرية الأولى في هذا الفصل.

نظرية 6-1 الشكل الرباعي الناتج من القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفي كل ضلعين متتاليين في شكل رباعي آخر هو متوازي أضلاع.

البرهان

في الشكل $6-1$ النقاط P,Q,R,S منتصفات أضلاع الرباعي $ABCD$.

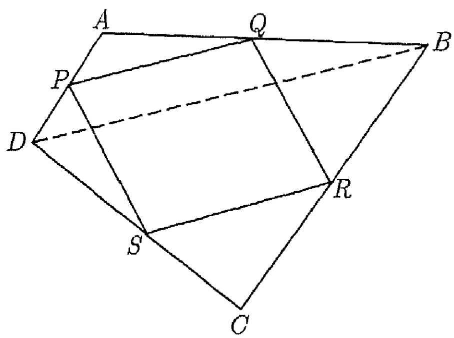
في ΔADB ، $\overline{PQ}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين. إذن:

$$\overline{PQ} \parallel \overline{DB}\ ,\ \ PQ = \frac{1}{2}(DB).$$

وفي ΔCDB ، $\overline{SR}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين. إذن:

$$\overline{SR} \parallel \overline{DB}, SR = \frac{1}{2}(DB) \Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{SR}, PQ = SR$$

ومنه، فالشكل الرباعي $PQRS$ متوازي أضلاع. ●



شكل $6-1$

والسؤال الآن، ما نوع الشكل الرباعي $ABCD$ ، الذي يجعل الشكل $PQRS$ مستطيلاً أو معيناً أو مربعاً ؟

نظرية 6–2	الشكل الرباعي الناتج من القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفي كل ضلعين متتالين في شكل رباعي آخر قطراه متعامدان هو مستطيل .

البرهان

في الشكل $1-6$ ، لأن $\overline{QR} \parallel \overline{AC}$ ، فإن الشكل الرباعي $PQRS$ يكون مستطيلاً (أي متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متعامدان) إذا كان $\overline{PQ} \perp \overline{QR}$ ، وهذا صحيح لأن $\overline{AC} \perp \overline{DB}$.

نظرية 6–3 الشكل الرباعي الناتج من القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفي كل ضلعين متتاليين في شكل رباعي آخر قطراه متطابقان هو معين .

البرهان

ليكن لدينا شكل رباعي قطراه متطابقان (انظر الشكل $2-6$). في ΔADB ، $\overline{PQ}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين، إذن :

$$PQ = \frac{1}{2}(DB)$$

وبالمثل $\overline{SR}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين في ΔCDB ، إذن :

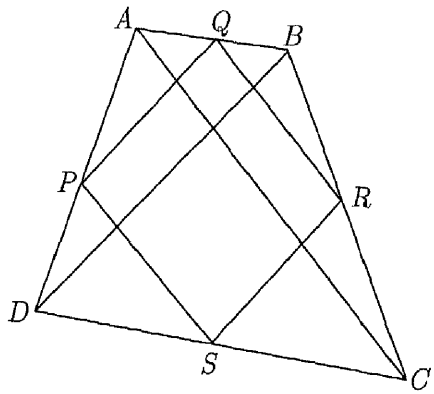
$$SR = \frac{1}{2}(DB)$$

ولكن

$DB = CA$ ، إذن:

$$PQ = QR$$

أي أن متوازي الأضلاع $PQRS$ معين . ●



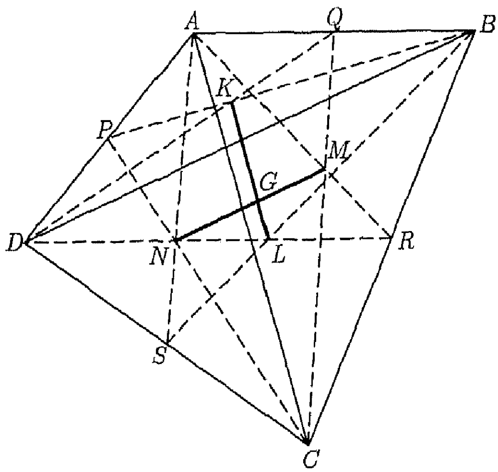
شكل 2 − 6

بمقارنة نتيجتي نظريتي $3-6$, $2-6$ ، يمكننا أن نتوصل إلى النظرية التالية.

نظرية 6–4	الشكل الرباعي الناتج من القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفي كل ضلعين متتاليين في شكل رباعي آخر قطراه متطابقان ومتعامدان هو مربع .

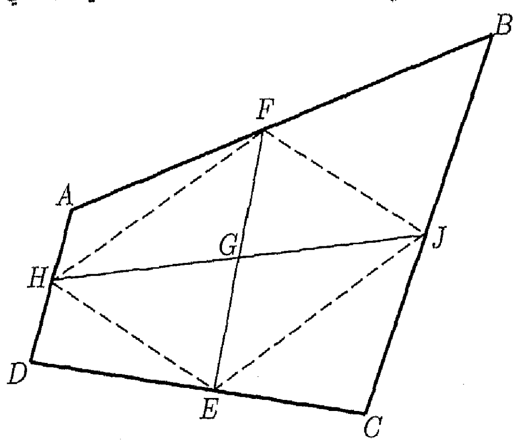
مراكز الشكل الرباعي Centers of a Quadrilateral

لتكن النقطتان M, N هما نقطتي تقاطع متوسطات $\Delta ABC, \Delta ADC$ على الترتيب، وكذلك النقطتان K, L هما نقطتي تقاطع متوسطات $\Delta ABD, \Delta BCD$ على الترتيب أيضاً، فإذا تقاطع كل من $\overline{MN}, \overline{KL}$ في النقطة G فإن هذه النقطة تكون مركز الشكل الرباعي Centroid (انظر الشكل $3-6$). كما يمكننا أيضاً تعريف النقطة G على النقطة التي يتوازن عندها ثقل الشكل الرباعي $ABCD$.



شكل 3 − 6

أما *النقطة المتوسطة* في الرباعي فإنه يتم تعيينها من خلال تقاطع القطعتين الواصلتين بين منتصفي كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي، وكما في الشكل 4 − 6 فإن النقطة G هي النقطة المتوسطة Centerpoint في الرباعي $ABCD$.



شكل 4 − 6

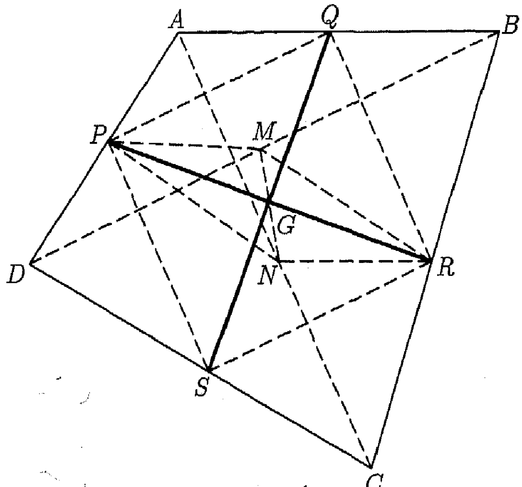
نظرية 6–5 القطعتان المستقيمتان الواصلتان بين منتصفي كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي تنصف كل منهما الأخرى.

البرهان

لأن القطعتين المستقيمتين الواصلتين بين منتصفي كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي هما قطرا متوازي الأضلاع الناتج من توصيل كل منتصفي ضلعين متتاليين في الشكل الرباعي، إذن ينصف كل منهما الآخر .●

على الشكل $5-6$ ، إذا كان لدينا النقاط P, Q, R, S منتصفات أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ ، والنقطة G الناتجة من تقاطع $\overline{PR}, \overline{QS}$ ، فإنه توجد علاقة بين $\overline{PR}, \overline{QS}$ ، $\overline{MN}$ ، حيث M, N منتصفا قطري الرباعي $ABCD$ ، وهذه العلاقة هي ما تنص عليه النظرية التالية.

نظرية 6–6 منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي قطري الشكل الرباعي هي النقطة المتوسطة لنفس الرباعي.



شكل $5-6$

البرهان

في الشكل $5-6$ ، M,N منتصفا $\overline{PD},\overline{AC}$ ، والنقاط P,Q,R,S منتصفات أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$. في ΔADC ، القطعة المستقيمة PN واصلة بين منتصفي ضلعين فيه. إذن :

$$\overline{PN} \parallel \overline{DC},\ PN = \frac{1}{2}(DC)$$

وفي ΔADC ، القطعة المستقيمة MR واصلة بين منتصفي ضلعين فيه. إذن :

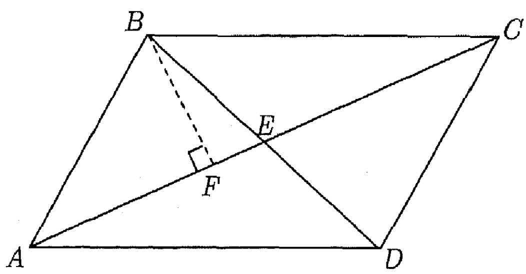
$$\overline{MR} \parallel \overline{DC},\ MR = \frac{1}{2}(DC) \Rightarrow \overline{PN} \parallel \overline{DC},\ PN = MR$$

إذن الشكل الرباعي $PMNR$ متوازي أضلاع ، وحيث إن قطريه ينصف كل منهما الآخر ويتقاطعان في النقطة G التي كنا قد أثبتنا أنها النقطة المتوسطة للشكل الرباعي $ABCD$.●

وبما أننا مازلنا نتحدث عن متوازيات الأضلاع ، فإن النظرية القادمة تقدم علاقة مهمة ، وتسمح مع ما سبق بتقديم خواص أخرى مهمة للشكل الرباعي.

نظرية 6-7 مجموع مساحتي المربعين المنشأين على قطري متوازي أضلاع تساوي مجموع مساحات المربعات المنشأة على أضلاعه.

البرهان



شكل $6-6$

قدمنا في برهان نظرية ستيوارت المعادلتين II,IV وسنستخدمهما في هذا البرهان. بعد تطبيقهما على متوازي الأضلاع $ABCD$ ، والمعطى $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ (انظر الشكل $6-6$) نجد أنه في ΔABE :

$$(AB)^2 = (BF)^2 + (AE)^2 - 2(AE)(FE) \qquad \text{(I)}$$

بالمثل في ΔEBC :

$$(BC)^2 = (BE)^2 + (EC)^2 + 2(EC)(FE) \qquad \text{(II)}$$

بالجمع

$$(AB)^2 + (BC)^2 =$$
$$(BE)^2 + (AE)^2 + (BE)^2 + (BC)^2 - 2(AE)(FE) + 2(EC)(FE)$$

ولكن $AE = EC$ (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر)

$$(AB)^2 + (BC)^2 = 2(BE)^2 + 2(AE)^2 \qquad \text{(III)}$$

بالمثل في ΔCAD :

$$(CD)^2 + (DA)^2 = 2(DE)^2 + 2(CE)^2 \qquad \text{(IV)}$$

بالجمع

$$(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 =$$
$$2(BE)^2 + 2(AE)^2 + 2(DE)^2 + 2(CE)^2$$

ولكن $DE = BE, AE = EC$

$$\Rightarrow (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 = 4(BE)^2 + 4(AE)^2$$
$$= (2BE)^2 + (2AE)^2 = (BD)^2 + (AC)^2 . \bullet$$

والآن لندمج النظريتين $6-7$ ، $6-1$ ، ونشاهد ما يحدث.

نظرية 6–8 مجموع مساحتي المربعين المنشأين على قطري أي شكل رباعي تساوي ضعف مجموع مساحات المربعين المنشأين على القطعتين المستقيمتين بين منتصفي كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي .

البرهان

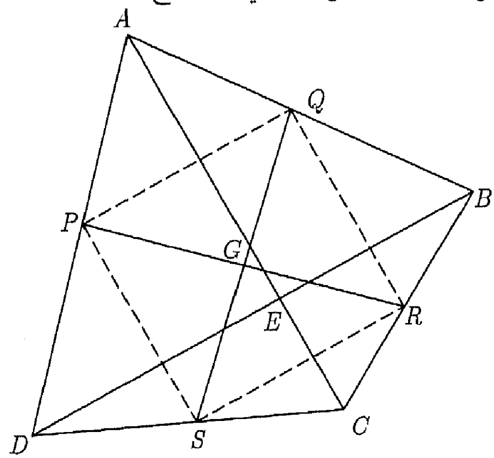
لقد أثبتنا في برهان النظرية 6 – 1 أن : $PQ = \frac{1}{2}(DB)$ ، $\overline{PQ} \parallel \overline{DB}$، وهذا يقود إلى :

$$\left(PQ\right)^2 = \frac{1}{4}\left(DB\right)^2,\ \left(SR\right)^2 = \frac{1}{4}\left(DB\right)^2 \qquad \text{(I)}$$

بالمثل $PS = \frac{1}{2}(AC)$ ، $QR = \frac{1}{2}(AC)$ وهذا يقود إلى

$$\left(QR\right)^2 = \frac{1}{4}\left(AC\right)^2,\ \left(PS\right)^2 = \frac{1}{4}\left(AC\right)^2 \qquad \text{(II)}$$

وبتطبيق نظرية 6 – 7 على متوازي الأضلاع $PQRS$ (الشكل 6 – 7) نحصل على :



شكل 6 – 7

$$(PQ)^2+(SR)^2+(QR)^2+(PS)^2=(PR)^2+(QS)^2 \qquad (\mathrm{III})$$

بالتعويض من $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$ في (III) :

$$\frac{1}{4}(DB)^2+\frac{1}{4}(DB)^2+\frac{1}{4}(AC)^2+\frac{1}{4}(AC)^2=(PR)^2+(QS)^2$$

$$\frac{1}{2}(DB)^2+\frac{1}{2}(AC)^2=(PR)^2+(QS)^2$$

$$(DB)^2+(AC)^2=2\left[(PR)^2+(QS)^2\right]. \bullet$$

الأشكال الرباعية الدائرية Cyclic Quadrilaterals

ربما تكون صيغة هيرون الإسكندري Heron of Alexandria لإيجاد مساحة مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه والتي تنص على

$$\text{مساحة المثلث} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(حيث a, b, c أطوال أضلاع المثلث بينما $s=\dfrac{a+b+c}{2}$)

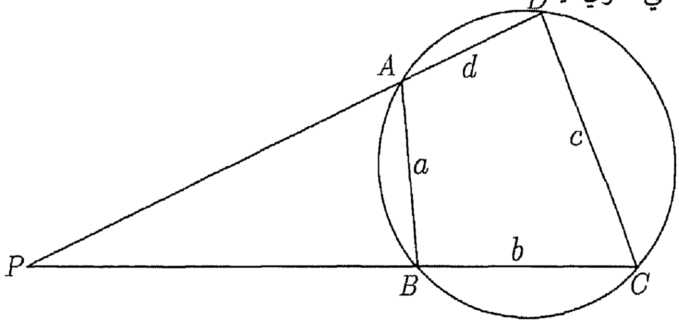
قد صادفتك قبل ذلك، وعندها ربما أيضاً تكون قد فكرت في توسعة تلك الصيغة لتشمل الشكل الرباعي ، معتبراً أن المثلث هو شكل رباعي طول أحد أضلاعه صفر. إن كان هذا تفكيرك فإنك تسلك نفس مسار التفكير الذي سلكه الرياضي الهندي براهاماجوبتا Brahmagupta * والذي عاش في بدايات القرن السابع الميلادي، واستخدم الصيغة التالية لإيجاد مساحة الرباعي الدائري والذي أطوال أضلاعه a, b, c, d ، وطول نصف محيطه s ،

---

* في العام ٦٢٨م، كتب براهاماجوبتا Brahmagupta الذي ولد في عام ٥٩٨ ما يسمى " النظام المنقح لبراهما– the Revised System of Brahma" في اثني عشر أو ثلاثة عشر فصلاً في الرياضيات .

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \text{مساحة الرباعي الدائري}$$

لاحظ أن براهاماجوبتا استخدم صيغة هيرون لإيجاد مساحة المثلث معتبراً أن المثلث هو رباعي دائري فيه $d = 0$.



شكل $8-6$

البرهان (صيغة براهاماجوبتا)

أولاً ، لندرس الحالة التي فيها الشكل الرباعي $ABCD$ مستطيل أي $a = c, b = d$ وبفرض أن صيغة براهاماجوبتا صحيحة ، فإن :

$$\text{مساحة المستطيل } ABCD = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$= \sqrt{(a+b-a)(a+b-b)(a+b-a)(a+b-b)}$$
$$= \sqrt{a^2b^2} = ab$$

وهذه هي مساحة المستطيل كما نحصل عليها بالطريقة العادية .

والآن لنعتبر $ABCD$ رباعياً دائرياً ليس مستطيل الشكل (انظر الشكل $8-6$). ونمد $\overline{DA}, \overline{CB}$ ليتقاطعا في P ، ولنفرض أن $PC = x, PD = y$ ثم نطبق صيغة هيرون : مساحة ΔDCP =

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+c)(y-x+c)(x+y-c)(x-y+c)} \qquad \text{(I)}$$

بما أن : $\angle CDA$ تكمل $\angle CBA$ ، $\angle ABP$ تكمل $\angle CBA$. إذن :

$$\angle CDA \cong \angle ABP$$

$$\Rightarrow \Delta BAP \sim \Delta DCP \qquad \text{(II)}$$

$$\Rightarrow \frac{[\Delta BAP]}{[\Delta DCP]}=\frac{a^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[\Delta DCP]}{[\Delta DCP]}-\frac{[\Delta BAP]}{[\Delta DCP]}=\frac{c^2}{c^2}-\frac{a^2}{c^2}$$

$$\frac{[\Delta DCP]-[\Delta BAP]}{[\Delta DCP]}=\frac{areaABCD}{[\Delta DCP]}=\frac{c^2-a^2}{c^2} \qquad \text{(III)}$$

من (II) نحصل أيضاً على :

$$\frac{x}{c}=\frac{y-d}{a} \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{y}{c}=\frac{x-b}{a} \qquad \text{(V)}$$

بالجمع

$$\frac{x+y}{c}=\frac{x+y-d-b}{a}$$

$$\Leftrightarrow x+y=\frac{c}{c-a}(d+b)$$

$$\Leftrightarrow x+y+c=\frac{c}{c-a}(b+c+d-a) \qquad \text{(VI)}$$

وبطريقة مماثلة نحصل على العلاقات التالية :

$$y-x+c=\frac{c}{c+a}(a+c+d-b) \qquad \text{(VII)}$$

$$y+x-c=\frac{c}{c-a}\left(a+b+d-c\right) \qquad \left(\mathrm{VIII}\right)$$

$$x-y+c=\frac{c}{c+a}\left(a+b+c-d\right) \qquad \left(\mathrm{IX}\right)$$

بالتعويض من $\left(\mathrm{IX}\right),\left(\mathrm{VIII}\right),\left(\mathrm{VII}\right),\left(\mathrm{VI}\right)$ في $\left(\mathrm{I}\right)$ نحصل على أن مساحة ΔDCP تساوي

$$\frac{c^2}{4\left(a^2-c^2\right)}\sqrt{\left(b+c+d-a\right)\left(a+c+d-b\right)\left(a+b+d-c\right)\left(a+b+c-d\right)}$$

$$=\frac{c^2}{a^2-c^2}\frac{\sqrt{\left(b+c+d-a\right)\left(a+c+d-b\right)\left(a+b+d-c\right)\left(a+b+c-d\right)}}{4}$$

$$=\frac{c^2}{a^2-c^2}\sqrt{\frac{\left(b+c+d-a\right)}{2}\cdot\frac{\left(a+c+d-b\right)}{2}\cdot\frac{\left(a+b+d-c\right)}{2}\cdot\frac{\left(a+b+c-d\right)}{2}}$$

$$=\frac{c^2}{a^2-c^2}\sqrt{\frac{\left(a+b+c+d-2a\right)}{2}\frac{\left(a+b+c+d-2b\right)}{2}\frac{\left(a+b+c+d-2c\right)}{2}\frac{\left(a+b+c+d-2d\right)}{2}}$$

ولكن : $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ ،

$$\left[\Delta DCP\right]=\frac{c^2}{a^2-c^2}\sqrt{\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)}$$

من الممكن صياغة العلاقة $\left(\mathrm{III}\right)$ على الصورة :

$$\text{مساحة الرباعي الدائري } ABCD=\frac{c^2-a^2}{c^2}\cdot\left[\Delta DCP\right]$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2 - c^2} \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \bullet$$

وفي تطوير ممتع لصيغة براهاماجوبتا ، يمكننا صياغة العلاقة التالية والتي سنقدمها بدون برهان :

مساحة سطح أي شكل رباعي (محدب) تساوي

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

حيث : a, b, c, d أطوال أضلاع الشكل الرباعي ، $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ ، α, γ قياسا زاويتين متقابلتين في الرباعي.

والصيغة السابقة تثبت لنا أن أكبر قيمة ممكنة لمساحة أي شكل رباعي معلوم أطوال أضلاعه الأربعة هي عندما : $abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = 0$ وهذه الحالة لا تتحقق إلا عندما : $\alpha + \gamma = 180^\circ$ وهذا لا يتحقق إلا عندما يكون الشكل الرباعي دائرياً.

وهناك العديد من النظريات الشيقة التي تتحدث عن الشكل الرباعي الدائري ، ولكن قبل أن نقوم بدراسة هذه النظريات ، ننصح القارئ بالعودة إلى صفحة 21 التي توضح طرق إثبات أن الشكل الرباعي دائري.

وكذلك قدم برهماجوبتا صيغاً لإيجاد طولي قطري الشكل الرباعي الدائري. وهي :

$$m^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc},\ n^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

حيث a, b, c, d أطوال أضلاع الرباعي الدائري، m, n طولا قطريه.

وقبل أن نترك هذا الرياضي الرائع برهماجوبتا، نعرض النظرية التالية والتي تنسب إليه أيضاً.

نظرية 6-9 في الشكل الرباعي الدائري المتعامد قطراه، المستقيم المار بنقطة تقاطع القطرين والعمودي على احد أضلاع الرباعي الدائري ينصف الضلع المقابل لهذا الضلع.

البرهان

ليكن $\overline{AC}, \overline{BD}$ قطرين متعامدين في الرباعي الدائري $ABCD$ متقاطعين في النقطة G، $\overleftrightarrow{GE} \perp \overleftrightarrow{AED}$ (انظر الشكل $9-6$)، والمطلوب هو إثبات أن $\overleftrightarrow{GE}$ ينصف $\overline{BC}$ في النقطة P. في المثلث القائم الزاوية AEG، $\angle 5$ تكمل $\angle 1$، $\angle 2$ تكمل $\angle 1$، إذن:

$$\angle 2 \cong \angle 5 \text{ ولأن } \angle 2 \cong \angle 4$$

إذن :

$$\angle 5 \cong \angle 4$$

ولكن $\angle 6 \cong \angle 5$ (كل منهما يساوي $\frac{1}{2} m\widehat{DC}$)،

ومن ذلك نستنتج أن :

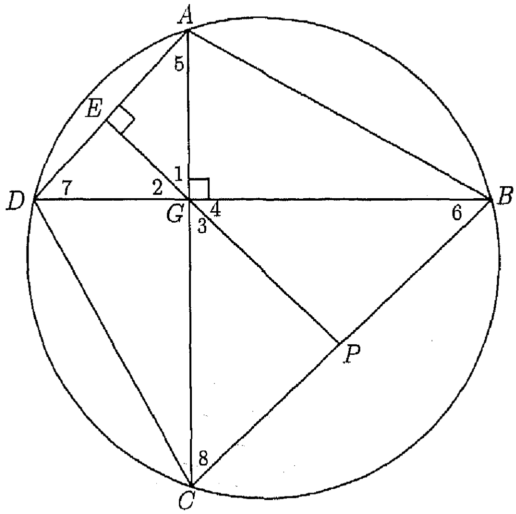
$$\angle 4 \cong \angle 6 \text{ ، } BP = GP .$$

بالمثل لأن: $\angle 3 \cong \angle 7$، $\angle 8 \cong \angle 7$ فإن:

$$GP = PC$$

إذن:

$$CP = BP \bullet .$$

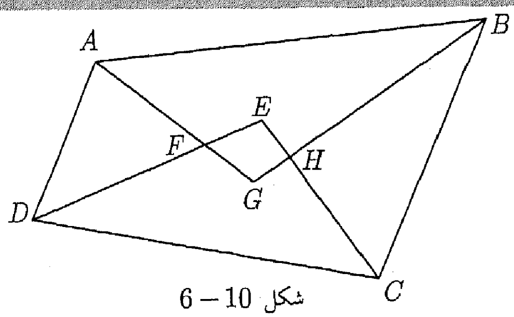


شكل 9 − 6

من الطرق الشيقة لإنشاء شكل رباعي دائري هو ما تقدمه النظرية التالية :

نظرية 6–10 إذا رسمنا منصف زاوية من كل زوج من الزوايا المتجاورة في شكل رباعي فإن القطع المستقيمة الواصلة بين نقاط التقاطع هي رؤوس شكل رباعي دائري.

البرهان 1



شكل 10 − 6

في الشكل $10-6$ ، منصفات زوايا الشكل الرباعي $ABCD$ تلتقي لتشكل الرباعي $EFGH$ وسنحاول أن نثبت أن الشكل الرباعي السابق هو رباعي دائري.

بما أن $m\angle BAD+m\angle ADC+m\angle DCB+m\angle CBA=360^\circ$. إذن :

$$\frac{1}{2}m\angle BAD+\frac{1}{2}m\angle ADC+\frac{1}{2}m\angle DCB+\frac{1}{2}m\angle CBA=\frac{1}{2}\left(360^\circ\right)=180^\circ$$

بالتعويض نستنتج أن :

$$m\angle EDC+m\angle ECD+m\angle GAB+m\angle ABG=180^\circ \qquad (\mathrm{I})$$

الآن، في $\Delta ABG, \Delta DEC$ ، لدينا :

$$m\angle EDC+m\angle ECD+m\angle GAB+m\angle ABG+m\angle AGB$$
$$+m\angle DEC=2\left(180^\circ\right) \qquad (\mathrm{II})$$

بطرح (I) من (II) نحصل على :

$$m\angle AGB+m\angle DEC=180^\circ$$

ولأن زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي $EFGH$ متكاملتان ، فإن الزاويتين الباقيتين هما أيضاً متكاملتان ، أي أن الرباعي $EFGH$ هو رباعي دائري . ●

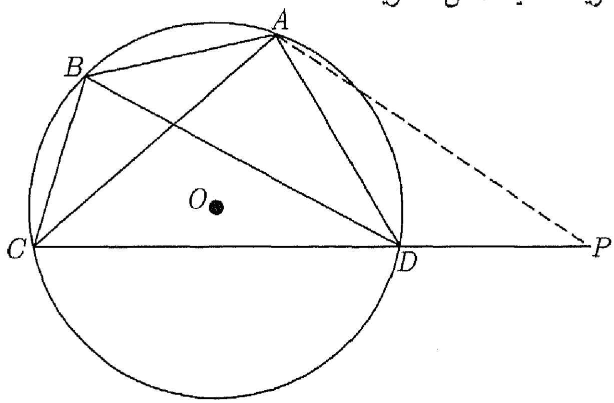
نظرية بطليموس Ptolemy's theorem

ربما تكون النظرية الأشهر التي تحدثت عن الشكل الرباعي الدائري هي التي تنسب لكلاوديوس بطليموس الإسكندري Claudius Ptolemaeus of Alexandria (والذي يعرف في المراجع الأجنبية باسم Ptolemy) وقد وردت في كتابه الذي يحمل عنوان : المجسطي* " (١٥٠ بعد الميلاد) والذي يعد أقدم الكتب المعروفة في الفلك.

* العنوان اليوناني Syntaxis Mathematica ، وتعني التجميع الرياضي أو الفلكي ، أما العنوان العربي للكتاب فكان المجسطي Almagest " ويعني الأطروحة الكبرى في الرياضيات. والكتاب عبارة عن دليل عن كل ما عرفه القدماء في علم الفلك الرياضي في ذلك. ويحتوي المجلد الأول من ثلاثة عشر مجلداً والتي يتألف منها هذا العمل الضخم على النظرية التي تحمل اسم نظرية بطليموس Ptolemy's theorem.

نظرية 6-11 **(نظرية بطليموس)** حاصل ضرب طولي قطري الرباعي الدائري يساوي مجموع حاصل ضربي كل زوج من الضلعين المتقابلين في الشكل.

سوف نقوم بإثبات النظرية بطريقتين مختلفتين، وسندمج إثبات عكس النظرية مع الطريقة الثانية ضمن النظرية $12-6$.



شكل $11-6$

في الشكل $11-6$ ، الرباعي $ABCD$ مرسوم داخل الدائرة O ، والمستقيم المرسوم والمار بالنقطة A يلاقي $\overleftrightarrow{CD}$ في النقطة P ، بحيث

$$m\angle BAC = m\angle DAP \qquad \text{(I)}$$

ولأن الرباعي $BACD$ دائري، إذن:

$$m\angle ABC + m\angle ADC = 180°$$

ولكن

$$m\angle ADP + m\angle ADC = 180°$$

فيكون لدينا

$$m\angle ABC = m\angle ADP \qquad \text{(II)}$$

$$\Delta BAC \sim \Delta DAP \ (AA) \qquad \text{(III)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DP}$$

$$\Rightarrow \quad DP = \frac{(AD)\cdot(BC)}{AB} \qquad \text{(IV)}$$

من (I) : $m\angle BAD = m\angle CAP$ ، ومن (III) : $\frac{AC}{AP} = \frac{AB}{AD}$. إذن :

$$\Delta ABD \sim \Delta ACP \ (SAS)$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CP} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow CP = \frac{(AC)\cdot(BD)}{AB} \qquad \text{(V)}$$

ولكن

$$CP = CD + DP \qquad \text{(VI)}$$

بالتعويض من $(\mathrm{V}),(\mathrm{IV})$ في (VI) :

$$\frac{(AC)\cdot(BD)}{AB} = CD + \frac{(AD)\cdot(BC)}{AB}$$

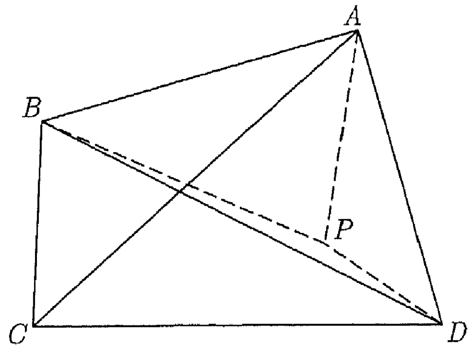
إذن ، $(AC)\cdot(BD) = (AB)\cdot(CD) + (AD)\cdot(BC)$.●

البرهان II

في الرباعي $ABCD$ (الشكل $12-6$)، نرسم ΔDAP على الضلع $\overline{AD}$ يشابه ΔCAB ، ومن ذلك نستنتج أن :

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{PD} \qquad \text{(I)}$$

$$\Rightarrow (AC)\cdot(PD) = (AD)\cdot(BC) \qquad \text{(II)}$$



شكل 12 – 6

ولأن $m\angle BAC = m\angle PAD, m\angle BAP = m\angle CAD$ ؛ إذن، من (I):

$$\Delta BAP \sim \Delta CAD \ (SAS) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CD}$$

وعليه فإن:

$$(AC)\cdot(BP) = (AB)\cdot(CD) \qquad \text{(III)}$$

بجمع $\text{(II)},\text{(III)}$:

$$(AC)(BP+PD) = (AD)\cdot(BC) + (AB)\cdot(CD) \qquad \text{(IV)}$$

والآن لنناقش وضع النقطة P بالنسبة للقطر $\overline{BD}$ ، فمن تشابه $\Delta DAP, \Delta CAB$ نستنتج أن :

$m\angle ADP = m\angle ACB$. ومن المعطى الخاص بأن الشكل $ABCD$ رباعي دائري نستنتج أيضاً أن $m\angle ADB = m\angle ACB$ ، ومن ذلك فإن النقطة P يجب أن تقع على $\overline{BD}$ إذا وفقط إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ دائرياً. هذا يقود إلى أن :

$$BP + PD = BD \qquad \text{(V)}$$

بالتعويض من $(\mathrm{IV}),(\mathrm{V})$:

إذن : $(AC)\cdot(BD)=(AB)\cdot(CD)+(AC)\cdot(BD)$. ●

لاحظ أننا هنا قد أثبتنا كلاً من نظرية بطليموس وعكسها ، ونقدم ذلك تفصيلاً في النظرية التالية .

نظرية 6-12 (عكس نظرية بطليموس) إذا كان حاصل ضرب طولي قطري شكل رباعي يساوي مجموع حاصل ضربي كل زوج من الضلعين المتقابلين فيه ، فإن هذا الشكل الرباعي يكون دائرياً.

البرهان

نفرض أن الرباعي $ABCD$ ليس دائرياً (انظر الشكل $11-6$)، وإذا كانت النقاط C,D,P على استقامة واحدة ، فإن $m\angle ADP\neq m\angle ABC$ ، ولكن إذا كانت النقاط C,D,P ليست على استقامة واحدة فإنه من الممكن أن يكون $m\angle ADP=m\angle ABC$ ، إذن $CP<CD+DP$ ومن $(\mathrm{IV}),(\mathrm{V})$ في البرهان الأول لنظرية بطليموس :

$$(AC)\cdot(BD)<(AB)\cdot(CD)+(AD)\cdot(BC)$$

ولكن ذلك يناقض المعطى :

$$(AC)\cdot(BD)=(AB)\cdot(CD)+(AD)\cdot(BC)$$

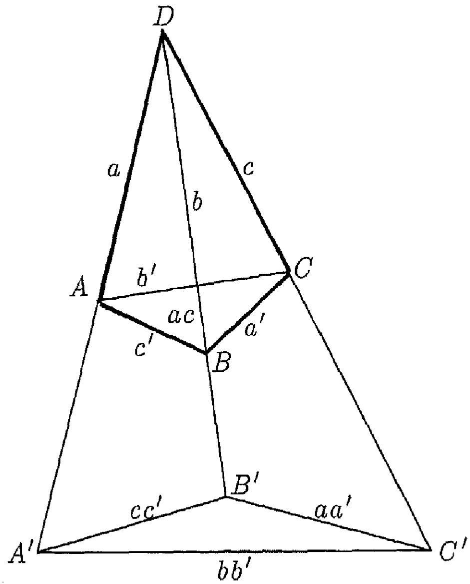
إذن الرباعي $ABCD$ دائري. ●

والآن ، لندرس تطويراً بسيطاً لنظرية بطليموس

نظرية 6-13 ليكن لدينا رباعي غير دائري $ABCD$ ، ولنفرض فيه أن $AD=a$ ، $BD=b$ ، $CD=c$ ، $BC=a'$ ، $AC=b'$ ، $AB=c'$. إن مجموع أي عددين من الأعداد aa',bb',cc' أكبر من العدد الثالث (انظر الشكل $13-6$).

البرهان*

لننشئ A' على $\overleftrightarrow{AD}$ بحيث $DA' = bc$. ولننشئ B' على $\overleftrightarrow{BD}$ بحيث $DB' = ac$.
وأخيراً لننشئ C' على $\overleftrightarrow{CD}$ بحيث $DC' = ab$.



شكل 13 − 6

وعند ذلك سنلاحظ أن $\Delta DB'A' \sim \Delta DAB$ لأنهما يحتويان على زاوية مشتركة $\angle ADB$ وأضلاع متجاورة متناسبة كالتالي:

$$\frac{DB'}{DA} = \frac{ac}{a} = c, \frac{DA'}{DB} = \frac{bc}{b} = c \Rightarrow \frac{DA'}{DB} = \frac{DB'}{DA} = c$$

* البرهان مقدم من الدكتور/ هاري دبليو أبلجيت Harry W. Appelgate من جامعة مدينة نيويورك The City University of New York.

وهذا يعني أن $c = \dfrac{A'B'}{AB}$ أو $A'B' = cc'$ ، وبالمثل نستطيع الوصول إلى أن $B'C' = aa', A'C' = bb'$.

وأخيراً في $\Delta A'B'C'$ ، وبتطبيق متباينة المثلث نحصل على :

$$aa' + bb' > cc',\ aa' + cc' > bb',\ cc' + bb' > aa'.$$ ●

والآن - عزيزي القارئ - هل فكرت في الوضع الذي تتحقق فيه المساواة : $aa' + cc' = bb'$ ؟

تطبيقات على نظرية بطليموس

في هذا الجزء سنقدم بعض النتائج المباشرة لنظرية بطليموس .

التطبيق 1

إذا مرت أي دائرة بالرأس A في متوازي الأضلاع $ABCD$ وقطعت AB, AD في R, P على الترتيب كما قطعت قطر متوازي الأضلاع AC في Q ، فأثبت أن :

$$(AQ)(AC) = (AP)(AB) + (AR)(AD)$$

البرهان

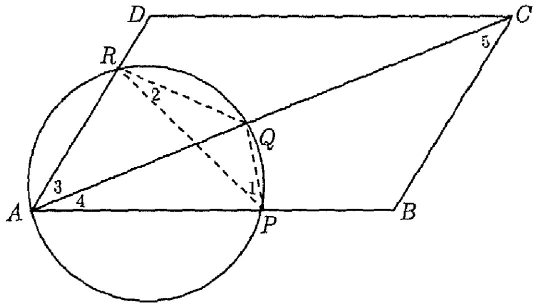
نرسم $\overline{RQ}, \overline{QP}, \overline{RP}$ كما في الشكل $14-6$ ، $m\angle 2 = m\angle 4,\ m\angle 1 = m\angle 3$.

ولكن $m\angle 3 = m\angle 5$ ، إذن $m\angle 1 = m\angle 5$. ومن ذلك نستنتج أن :

$$\Delta RQP \sim \Delta ABC\,.$$

ولكن أيضاً $\Delta CDA \cong \Delta ABC$ ؛ إذن :

$$\Delta RQP \sim \Delta ABC \sim \Delta CDA\,.$$



شكل 14 – 6

$$\frac{AC}{RP} = \frac{AB}{RQ} = \frac{AD}{PQ} \qquad \text{(I)}$$

بتطبيق نظرية بطليموس على الرباعي $RQPA$:

$$(AQ)(RP) = (RQ)(AP) + (PQ)(AB) \qquad \text{(II)}$$

بضرب كل نسبة من النسب المتساوية في العلاقة (I) في كل حد من حدود العلاقة (II) نحصل على :

$$(AQ)(RP)\frac{AC}{RP} = (RQ)(AP)\frac{AB}{RQ} + (PQ)(AB)\frac{AD}{PQ}$$

أو

$$(AQ)(AC) = (AB)(AP) + (AD)(AB). \bullet$$

التطبيق 2

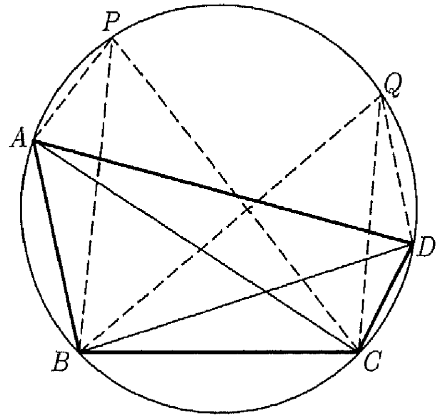
أوجد النسبة بين طولي قطري الشكل الرباعي الدائري وبين أطوال أضلاعه.

البرهان

لنختر أي نقطتين P,Q على الدائرة المحيطة بالشكل الرباعي $ABCD$ ، بحيث $PA = DC$ ، $QD = AB$ كما في الشكل 15 – 6.

بتطبيق نظرية بطليموس على الرباعي الدائري $ABCD$

$$(AC)(PB)=(AB)(PC)+(BC)(PA) \qquad (\mathrm{I})$$



شكل $6-15$

وبتطبيق نظرية بطليموس على الرباعي الدائري $BCDQ$

$$(BD)(QC)=(DC)(QB)+(BC)(QD) \qquad (\mathrm{II})$$

الآن، لأن $PA+AB=DC+QD$ ، فإن :

$$m\widehat{PAB}=m\widehat{QDC} \text{ ، } PB=QC.$$

ولأن $m\widehat{PBC}=m\widehat{DBA}$ ، فإن :

$$PC=AD$$

وكذلك لأن $m\widehat{QCB}=m\widehat{ACD}$ ، فإن $QB=AD$. وأخيراً بقسمة (I) على (II) وبالتعويض عن أي حد يحتوي P,Q نحصل على :

$$\frac{(AC)(PB)}{(BD)(QC)}=\frac{(AB)(PC)+(BC)(PA)}{(DC)(QB)+(BC)(QD)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(AC)(PB)}{(BD)(PB)}=\frac{(AB)(AD)+(BC)(DC)}{(DC)(AD)+(BC)(AB)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{BD}=\frac{(AB)(AD)+(BC)(DC)}{(DC)(AD)+(BC)(AB)}.\bullet$$

التطبيق 3

إذا كانت النقطة P تقع داخل متوازي الأضلاع $ABCD$ بحيث $\angle APB$ تكمل $\angle CPD$ (الشكل 16 – 6). فأثبت أن

$$.(AB)(AD)=(BP)(DP)+(AP)(CP)$$

البرهان

نرسم على الضلع $\overline{AB}$ في متوازي الأضلاع $ABCD$ ، $\Delta AP'B\cong\Delta DPC$ ،

إذن

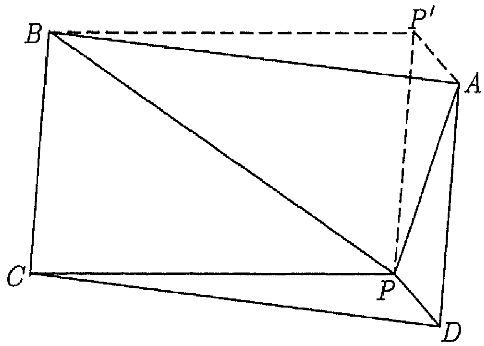
$$DP=AP',\ \ CP=BP' \qquad (\mathrm{I})$$

لأن $\angle APB$ تكمل $\angle CPD$ ، $m\angle BP'A=m\angle CPD$ ، $\angle APB$ تكمل $\angle BP'A$ ، فإن الشكل الرباعي $BP'AP$ دائري، وبتطبيق نظرية بطليموس عليه نحصل على:

$$(AB)(PP')=(BP)(AP')+(AP)(BP')$$

من (I) لدينا:

$$\left(AB\right)\left(PP'\right)=\left(BP\right)\left(DP\right)+\left(AP\right)\left(CP\right) \qquad (\mathrm{II})$$



شكل $6-16$

الآن. لأن $m\angle BAP' = m\angle CDP$ ، $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ ، فإن $\overline{PD} \parallel \overline{P'A}$ ، ومن ذلك فإن الشكل $PDAP'$ متوازي أضلاع ؛ إذن :

$$PP' = AD.$$

بالتعويض في (II) :

$$\left(AB\right)\left(AD\right)=\left(BP\right)\left(DP\right)+\left(AP\right)\left(CP\right). \bullet$$

وبعد أن انتهينا من التطبيق السابق ، فإن التطبيقات الخمسة التالية تقدم لنا نمطيات جميلة تدور حول المضلعات المنتظمة.

التطبيق 4

إذا رسم ΔABC المتطابق الضلعين ($AB = AC$) داخل دائرة ، وكانت النقطة $P \in \widehat{BC}$ فأثبت أن $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{PA}{PB+PC}$ ، وهو ثابت للمثلث المعطى.

البرهان

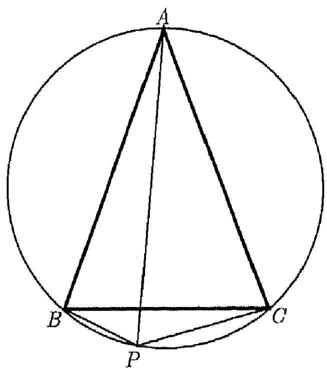
بتطبيق نظرية بطليموس على الدائري $ABPC$ (الشكل $15-6$):

$$(PA)(BC)=(BP)(AC)+(PC)(AB)$$

ولكن : $AB=AC$ ، إذن :

$$(PA)(BC)=AC(BP+AB)$$

$$\Leftrightarrow \frac{PA}{PB+PC}=\frac{AC}{BC}\ .$$ ●



شكل $17-6$

التطبيق 5

إذا رسم ΔABC المتطابق الأضلاع داخل دائرة ، وكانت النقطة $P\in\widehat{BC}$ فأثبت أن :

$.PA=PB+PC$

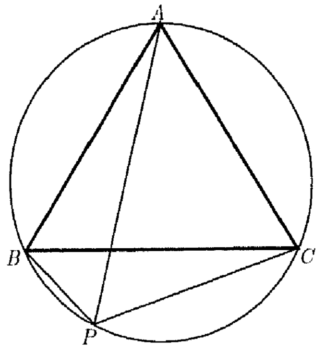
البرهان

بتطبيق نظرية بطليموس على الدائري $ABPC$ (الشكل $18-6$):

$$\left(PA\right)\left(BC\right)=\left(BP\right)\left(AC\right)+\left(PC\right)\left(AB\right) \qquad (\mathrm{I})$$

ولكن : $AB = AC = BC$

$$\Rightarrow PA = PB + PC\ . \bullet$$



شكل $6 - 18$

التطبيق 6

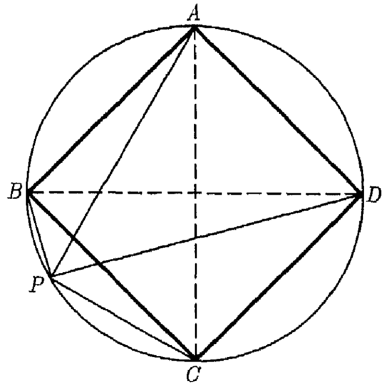
إذا رسم المربع $ABCD$ داخل دائرة، وكانت النقطة $P \in \widehat{BC}$ فأثبت أن

$$\frac{PA+PC}{PB+PD}=\frac{PD}{PA}$$

البرهان

في الشكل $6 - 19$ ، ΔABD متطابق الضلعين ($AB = AD$)، وباستخدام ما توصلنا إليه في التطبيق 4 ، نحصل على :

$$\frac{PA}{PB+PD}=\frac{AD}{DB} \qquad (\mathrm{I})$$



شكل 19 − 6

بالمثل في المثلث المتطابق الضلعين ΔADC :

$$\frac{PD}{PA+PC}=\frac{DC}{AC} \qquad (\mathrm{II})$$

ولكن : $AD=DC, DB=AC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{DC}{AC} \qquad (\mathrm{III})$$

من $(\mathrm{III}),(\mathrm{II}),(\mathrm{I})$ نحصل على :

$$\frac{PA}{PB+PD}=\frac{PD}{PA+PC} \Leftrightarrow \frac{PA+PC}{PB+PD}=\frac{PD}{PA}.$$ ●

التطبيق 7

إذا رسم الخماسي المنتظم $ABCDE$ ، داخل دائرة ، وكانت النقطة $P \in \overset{\frown}{BC}$ فأثبت أنْ :

$$PA+PD=PB+PC+PE$$

البرهان

في الرباعي $ABPC$ (انظر الشكل 20 – 6) وبتطبيق نظرية بطليموس : شكل المتطابق الضلعين ($AB = AD$) وباستخدام ما توصلنا إليه في التطبيق 4 ، نحصل على :

$$(PA)(BC) = (BA)(PC) + (PB)(AC) \qquad \text{(I)}$$

وفي الرباعي $BPCD$:

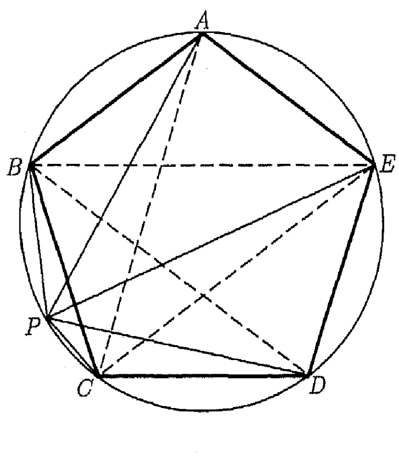
$$(PD)(BC) = (CD)(PB) + (PC)(BD) \qquad \text{(II)}$$

ولكن : $AD = DC, DB = AC$ ، وبجمع $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$ نحصل على

$$BC(PA + PD) = BA(PB + PC) + AC(PB + PC) \qquad \text{(III)}$$

ولأن ΔBEC متطابق الضلعين، وبتطبيق ما توصلنا إليه في التطبيق 4 نحصل على :

$$\frac{CE}{BC} = \frac{PE}{PB + PC} \Leftrightarrow \frac{(PE)(BC)}{(PB + PC)} = CE = AC \qquad \text{(IV)}$$



شكل 20 – 6

بالتعويض من (IV) في (III)

$$BC\left(PA+PD\right)=BA\left(PB+PC\right)+\frac{\left(PE\right)\left(BC\right)}{\left(PB+PC\right)}\left(PB+PC\right)$$

$$\Rightarrow BC\left(PA+PD\right)=BA\left(PB+PC\right)+\left(PE\right)\left(BC\right)$$

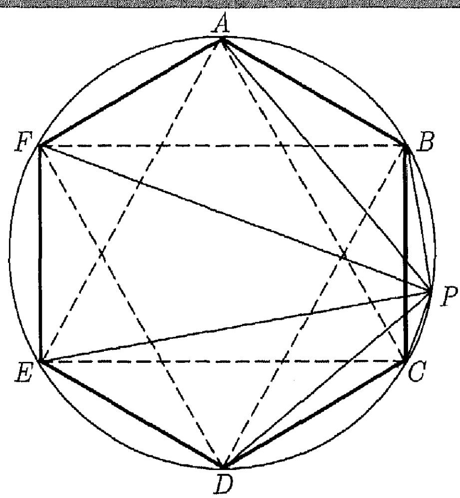
ولكن : $BC=BA$ ، إذن $PA+PD=PB+PC+PE$. ●

التطبيق 8

إذا رسم السداسي المنتظم $ABCDEF$ داخل دائرة، وكانت النقطة $P\in\widehat{BC}$ ، فأثبت أن :

$$PE+PF=PA+PB+PC+PD$$

البرهان



شكل $6-21$

نرسم الخطوط التي تصل بين الرؤوس A,E,C ، والتي ينتج منها المثلث المتطابق الأضلاع ACE

$$PE = PA + PC \qquad (\mathrm{I})$$

وبالمثل في ΔBPF المتطابق الأضلاع :

$$PF = PB + PD \qquad (\mathrm{II})$$

بجمع $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$:

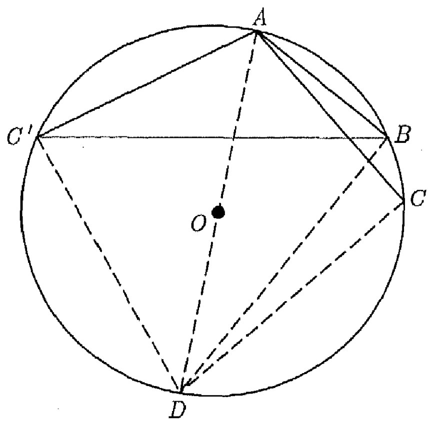
$$PE + PF = PA + PB + PC + PD. \bullet$$

التطبيق 9

إذا رسم مثلث داخل دائرة نصف قطرها 5 ، وكان طولا ضلعين في هذا المثلث 5,6 ، فأوجد طول الضلع الثالث في المثلث.

البرهان

في الشكل 22 – 6 ، نلاحظ أن هناك حالتين يجب أخذهما في الاعتبار عند حل هذه المشكلة، فكلا $\Delta ABC, \Delta ABC'$ يمكن إنشاؤهما داخل الدائرة O والتي نصف قطرها 5 بحيث يكون $AB = 5$ ، $AC = AC' = 6$ ، وعليه سنحاول أن نحصل على طول كل من BC, BC' .



شكل 22 – 6

نرسم قطر الدائرة $\overline{AOD}$ والذي طوله 10 ، ونصل كلاً من $\overline{DC}, \overline{DB}, \overline{DC'}$

$$\Rightarrow m\angle AC'D = m\angle ACD = m\angle ABD = 90^\circ$$

والآن لندرس الحالة التي فيها $\angle A$ حادة في ΔABC ، ففي ΔACD القائم، $DC = 8$ ، وفي ΔABD القائم ، $BD = 5\sqrt{3}$ ، وبتطبيق نظرية بطليموس على الرباعي $ABCD$

$$(AC)(BD) = (AB)(DC) + (AD)(BC), (6)(5\sqrt{3}) = (5)(8) + (10)(BC)$$

$$\Rightarrow BC = 3\sqrt{3} - 4$$

أما الحالة التي فيها $\angle A$ منفرجة في $\Delta ABC'$، ففي $\Delta AC'D$ القائم، $DC' = 8$ ، وبتطبيق نظرية بطليموس على الرباعي $ABDC'$ ، نجد أن :

$$(AC')(BD) + (AB)(DC') = (AD)(BC), (6)(5\sqrt{3}) + (5)(8) = (10)(BC')$$

$$\Rightarrow BC' = 3\sqrt{3} + 4 \ . \bullet$$

لقد بدأنا في هذا الفصل دراسة الأشكال الرباعية في صورتها العامة، والتي قادتنا بدورها للأشكال الرباعية الدائرية والتي مساحاتها أكبر ما يمكن عندما تكون أطوال أضلاعها معلومة، بالإضافة إلى خصائصها الكثيرة والمهمة، وخير دليل على ذلك صيغة برهاماجوبتا ونظرية بطليموس.

ولأن المجال يتسع بلا حدود فالأمر متروك للقارئ لمواصلة دراسة خصائص أنواع أخرى مختلفة من الأشكال الرباعية .

تدريبات

1. حدد نوع الشكل الرباعي الناتج من توصيل منتصفات الأضلاع المتتالية لكل رباعي مما يلي :

A.شبه منحرف غير متطابق الضلعين . B.شبه منحرف متطابق الضلعين .

مع ذكر السبب في كل حالة.

2. رسم مثلثان متطابقا الضلعين على قاعدة واحدة وفي جهتين مختلفتين منها ليكونا شكلاً رباعياً. حدد نوع الرباعي الناتج من توصيل منصفات أضلاعه.

3. هل عكس نظرية $1-6$ صحيح ؟ أثبت إجابتك.

4. أثبت أن محيط الشكل الرباعي الناتج من توصيل منتصفات الأضلاع المتتالية لشكل رباعي معطى يساوي مجموع طولي قطري الرباعي المعطى.

5. أثبت أن مساحة الشكل الرباعي الناتج من توصيل منتصفات الأضلاع المتتالية لشكل رباعي معطى يساوي نصف مساحة الرباعي المعطى.

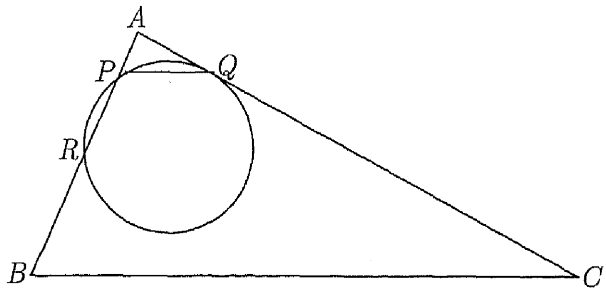
6. أثبت أن مجموع مربعات أضلاع أي شكل رباعي تساوي مجموع مربعي قطريه مضافاً إليه أربعة أمثال مربع القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي هذين القطرين.

7. أوجد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه $13,14,15$.

8. أوجد مساحة الرباعي الدائري الذي أطوال أضلاعه $9,10,10,21$.

9. أوجد مساحة الرباعي الدائري الذي أطوال أضلاعه $7,15,20,24$.

10. الخط المستقيم $\overleftrightarrow{PQ}$ يوازي القاعدة $\overline{BC}$ في ΔBAC ، ويقطع $\overline{AB},\overline{AC}$ في P,Q على الترتيب (الشكل $23-6$). رسمت الدائرة التي تمر بالنقطة P وتمس $\overline{AC}$ في Q وتقطع $\overline{AB}$ في R. أثبت أن النقاط R,C,B,Q تقع على دائرة واحدة.

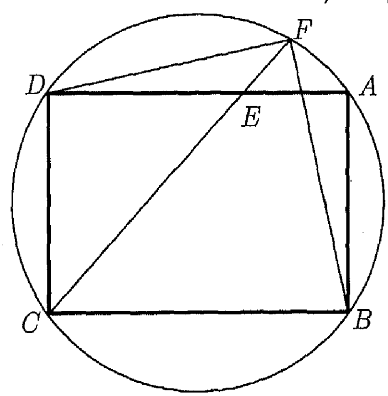


شكل $6-23$

11. أثبت أن المستقيمات المرسومة من منتصفات كل ضلع في الرباعي الدائري والعمودية على الضلع المقابل تتقاطع في نقطة واحدة.

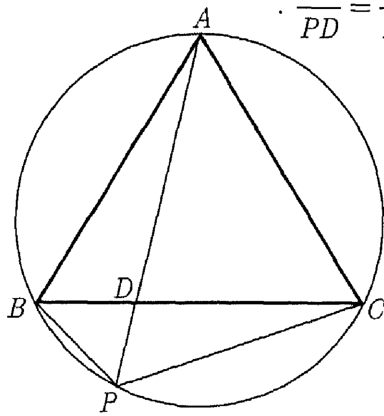
12. إلى أي نتيجة مشهورة تؤول نظرية بطليموس عندما يكون الشكل الرباعي الدائري مستطيلاً؟ برهن إجابتك.

13. النقطة E على $\overline{AD}$ في المستطيل $ABCD$ بحيث $DE = DC = 6$ $DA = 8$ (الشكل $6-24$)، ومددنا $\overline{CE}$ ليقطع الدائرة المحيطة بالمستطيل في F. أوجد طولي $\overline{DF}, \overline{FB}$.



شكل $6-24$

14. إذا رسم خط يمر بالرأس A في ΔABC المتطابق الأضلاع ويقطع كلاً من $\overline{BC}$ في D والدائرة المحيطة في النقطة P (انظر الشكل 25 − 6). أثبت أن $\frac{1}{PD} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.



شكل 25 − 6

15. أثبت أنه إذا وفقط إذا تعامد قطرا شكل رباعي فإن مجموع مربعي أي زوج من أضلاع الرباعي المتقابلين يساوي مجموع مربعي الضلعين المتقابلين الآخرين.

الفصل السابع

الدائرة الداخلية والدوائر الخارجية للمثلث

نقاط التماس

سوف نبدأ هذا الفصل بشكل قد يبدو مثيراً إلى حد ما. لنتذكر نظرية مألوفة من أساسيات الهندسة.

نظرية : 7-1	القطعتان المستقيمتان المماستان لدائرة المرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

لنقم بدراسة التمرين التالي، حيث نستخدم في حله النظرية أعلاه عدة مرات.

إذا كان محيط ΔABC يساوي 16 (انظر الشكل 1 – 7)، فأوجد طول $\overline{AK_1}$ (لاحظ أن كلاً من الدوائر الأربع I, I_1, I_2, I_3 تمس المستقيمات التي تحمل أضلاع ΔABC).

الحل

بتطبيق نظرية 0 – 7 على الشكل نجد أن :

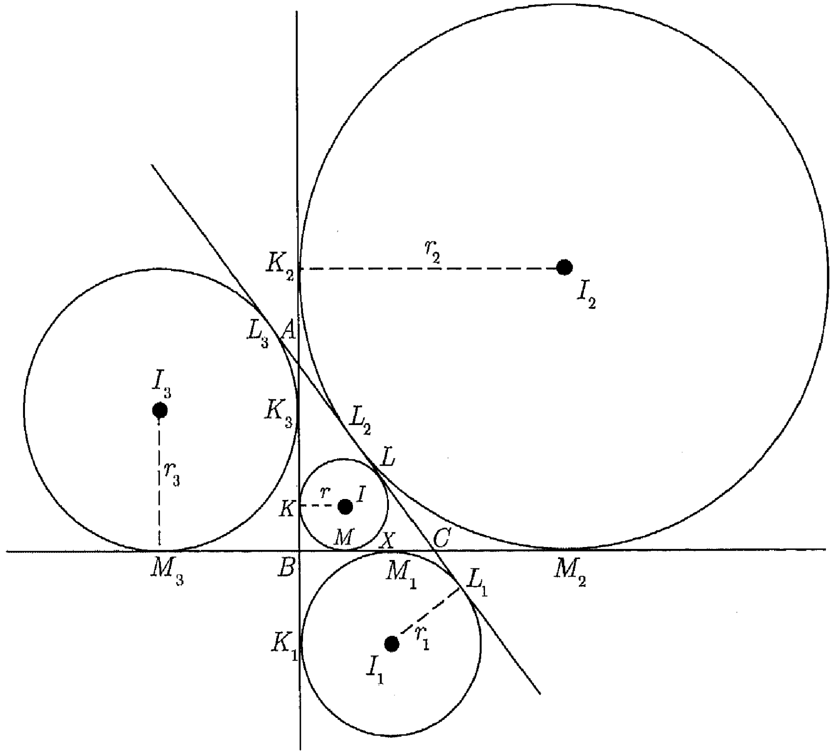
$$BK_1 = BM_1,\ CL_1 = CM_1$$

ولدينا محيط ΔABC = $AB + BC + AC = AB + \left(BM_1 + CM_1\right) + AC$

بالتعويض : محيط ΔABC = $AB + BK_1 + CL_1 + AC = AK_1 + AL_1$

ولكن $AK_1 = AL_1$ (قطعتان مماستان لدائرة مرسومتان من نقطة خارجها). إذن :

$$AK_1 = \frac{1}{2}\left(\text{محيط } \Delta ABC\right) = 8$$



شكل 1 – 7

الحل السابق يتعرض لعلاقة واحدة فقط من كثير من العلاقات الشيقة التي يحتويها موضوع الدوائر الثلاث الخارجية للمثلث أو الدائرة الداخلية له، وفي مناقشتنا التالية سوف نقدم علاقات أخرى تنطوي على هذه الدوائر الأربع للمثلث، ونقاط تماسها، حيث كل دائرة من هذه الدوائر تمس المستقيمات الثلاثة التي تحمل أضلاع المثلث.

والآن دعونا نؤصل العلاقة التي توصلنا إليها في التمرين السابق.

نظرية : 7-1 طول القطعة المستقيمة التي تحوي ضلع مثلث، والواصلة بين رأس المثلث ونقطة تماس هذه القطعة مع الدائرة الخارجية المقابلة لتلك الرأس يساوي نصف محيط المثلث.

عندما نرمز لنصف محيط ΔABC بالرمز s ، فإننا يمكننا صياغة المطلوب على الصورة :

$$AK_1 = AL_1 = s$$

وإذا كان $BC = a, AC = b, AB = c$ ، فإن :

$$BM_1 = BK_1 = AK_1 - AB = s - c$$

$$CM_1 = CL_1 = AL_1 - AC = s - b$$

وبسهولة – بطريقة مماثلة – نحصل على العلاقات الأخرى.

نظرية : 7-2 طول القطعة المستقيمة الواقعة على ضلع مثلث والواصلة بين أحد رؤوسه ونقطة تماس الدائرة الخارجية مع ذلك الضلع، تساوي طول نصف محيط المثلث مطروحاً منه طول الضلع المجاور المشترك مع الضلع السابق في نفس الرأس.

والآن نستدعي الطريقة التي نعين بها الدوائر الأربع ، ففي التطبيق الثالث الوارد في الفصل الثاني أثبتنا أن المنصف الداخلي لأي زاوية في مثلث يتقاطع في نقطة واحدة مع المنصفين الخارجيين للزاويتين الأخريين، وهذه النقطة هي مركز الدائرة الخارجية، وتسمى المركز الخارجي للمثلث excenter .

وباستخدام الخاصية التي تنص على أن أي نقطة تقع على منصف الزاوية تقع على مسافات متساوية من ضلعي الزاوية، من السهل أن نثبت أن نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث هي مركز الدائرة الداخلية للمثلث .

وعلى الرغم من معرفة الطلاب - من خلال مبادئ الهندسة - بالعلاقة بين القطعتين المستقيمتين المرسومتين من نقطة خارج دائرة، إلا أنهم لم يتطرقوا إلى العلاقة بين طولي هذين المماسين بدلالة أضلاع المثلث الناتج من المماسات المشتركة ؛ ولذلك فبرهان النظرية التالية يملأ هذا الفراغ.

نظرية : 7-3 طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس مثلث ونقطة تماس الدائرة الداخلية لنفس المثلث تساوي طول نصف محيط هذا المثلث مطروحاً منه طول الضلع المقابل لهذه الرأس.

البرهان

في الشكل $1-7$:

$$AK + AL + BK + BM + CL + CM \text{ المحيط يساوي}$$

ومن نظرية $0-7$ ، لدينا:

$$AK = AL, BK = BM, CL = CM$$

إذن ؛ نصف المحيط $s = AK + BM + CM = AK + BC$ أو

$AK = s - BC$ ، وهو المطلوب ●.

هناك أيضاً بعض العلاقات الشيقة بين نقاط التماس ودوائر المثلث الأربع ، نسعد بتقديمها فيما يلي.

نظرية : 7-4 طول القطعة المماسة الواقعة على ضلع مثلث والواصلة بين نقطتي التماس للدائرتين الداخلية والخارجية لمثلث تساوي الفرق بين طولي الضلعين الآخرين لهذا المثلث.

البرهان

من خلال نص النظرية فإننا سنحاول الحصول على طول $\overline{MM_1}$ بدلالة أطوال أضلاع المثلث.

تذكر أننا دائما نعتبر $AB = c, AC = b, BC = a$. من النظرية $7-2$ ،

$$CM_1 = CL_1 = s - b$$

ومن النظرية $7-3$:

$$BM = BK = s - b$$

حيث $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. والآن :

$$\begin{aligned} MM_1 &= CB - BM - CM_1 = a - (s-b) - (s-b) \\ &= a - 2(s-b) = a + 2b - 2s \end{aligned}$$

أي أن $MM_1 = b - c$. ●

وانطلاقاً من البرهان السابق سنحاول إثبات أن نقطة منتصف $\overline{MM_1}$ هي أيضاً نقطة منتصف $\overline{BC}$. وسنبدأ ذلك بملاحظة أن $BM = CM_1$ ، وحيث إن X منتصف $\overline{BC}$ ، $BX = CX$. بالطرح $MX = M_1X$ ، وتلك النتيجة هي ما تقرره النظرية التالية

نظرية : 7-5 نقطة منتصف أي ضلع من أضلاع المثلث هي أيضاً نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تقع بين نقطي تماس هذا الضلع مع الدائرتين الداخلية والخارجية لهذا المثلث.

وبعد ما سبق من إدراك للعلاقات بين الدوائر الأربع ومماساتها، يكون من الطبيعي الآن أن نسأل عن طول $\overline{MM_3}$ ، وهي القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطي تماس الدائرة الداخلية للمثلث على أحد أضلاعه والدائرة الخارجية المجاورة لها. وهذا الطول من السهل استنتاجه فلدينا $MM_3 = CM_3 - CM$. ومن نظرية $1 - 7$:

$$CM_3 = s$$

ومن نظرية $3 - 7$:

$$CM = s - c$$

إذن :

$$.MM_3 = s - (s - c) = c = LL_3$$

وعليه يمكننا صياغة ذلك في نص النظرية التالي.

نظرية : 7-6 طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تماس الدائرتين الداخلية والخارجية لمثلث تساوي طول ضلع المثلث المحصور بين هاتين الدائرتين.

والآن لندرس معا القطع المستقيمة المماسية الخارجية المشتركة لدائرتين خارجيتين عن مثلث ولنبدأ بالنظرية التالية .

نظرية : 7-7 طول القطعة المستقيمة المماسة الخارجية المشتركة بين دائرتين خارجيتين لمثلث تساوي مجموع أطوال هذا المثلث عدا الضلع الواقع على القطعة المستقيمة المماسة الخارجية المشتركة .

البرهان

هنا سنسعى لإيجاد طول $\overline{M_2M_3}$: $M_2M_3 = MM_2 + MM_3$ ، ومن نظرية $7-6$:

$MM_2 = b,\ MM_3 = c$ ، إذن :

$$M_2M_3 = b + c. \bullet$$

في النظرية التالية سنحاول تعيين طول القطعة المستقيمة المماسية الداخلية لدائرتين خارجيتين عن مثلث.

نظرية : 8-7 طول القطعة المستقيمة المماسة الداخلية المشتركة بين دائرتين خارجيتين لمثلث تساوي طول الضلع المقابل لرأس هذا المثلث الواقعة على هذه القطعة المستقيمة المماسة.

البرهان

هنا سنسعى لإيجاد $\overline{M_1M_2}$:

$$M_1M_2 = MM_2 - MM_1$$

ومن نظرية $7-6$:

$$MM_2 = b$$

من نظرية $7-4$:

$$MM_1 = b - c$$

إذن :

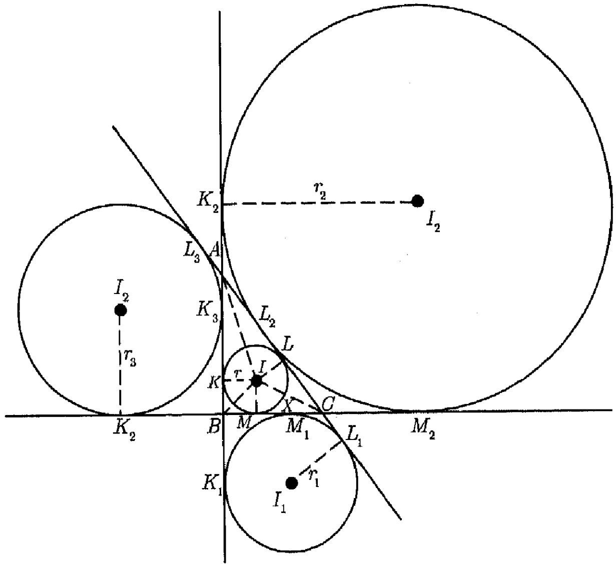
$$M_1M_2 = b - (b - c) = c. \bullet$$

وبالعلاقة السابقة نكون قد أكملنا دراسة القطع المستقيمة التي تعينها نقاط تماس الدوائر الأربع لأي مثلث.

أنصاف أقطار الدوائر الأربع للمثلث Equiradii

في هذا الجزء من الفصل سنقوم بدراسة أنصاف أقطار الدوائر الأربع التي تعاملنا معها سابقاً، وسنطلق على نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث، نصف القطر الداخلي للمثلث inradius.

نظرية : 7-9 طول نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث يساوي النسبة بين مساحة هذا المثلث إلى نصف محيطه.



شكل 2 – 7

البرهان

على الشكل 2 – 7 :

$$\left[\Delta ABC\right]=\left[\Delta BCI\right]+\ \left[\Delta ACI\right]+\ \left[\Delta ABI\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(IM\right)\left(BC\right)+\frac{1}{2}\left(IL\right)\left(AC\right)+\frac{1}{2}\left(IK\right)\left(AB\right)$$
$$=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc=\frac{1}{2}r\left(a+b+c\right)=sr$$
$$\Rightarrow r=\frac{\left[\Delta ABC\right]}{s}\ \bullet.$$

والآن لندرس علاقة أنصاف أقطار الدوائر الثلاث الخارجية للمثلث مع عناصر المثلث نفسه.

نظرية: 7–10 طول نصف قطر الدائرة الخارجية للمثلث يساوي النسبة بين مساحة هذا المثلث إلى الفرق بين نصف محيطه وطول الضلع المحصور بين تلك الدائرة الخارجية والدائرة الداخلية.

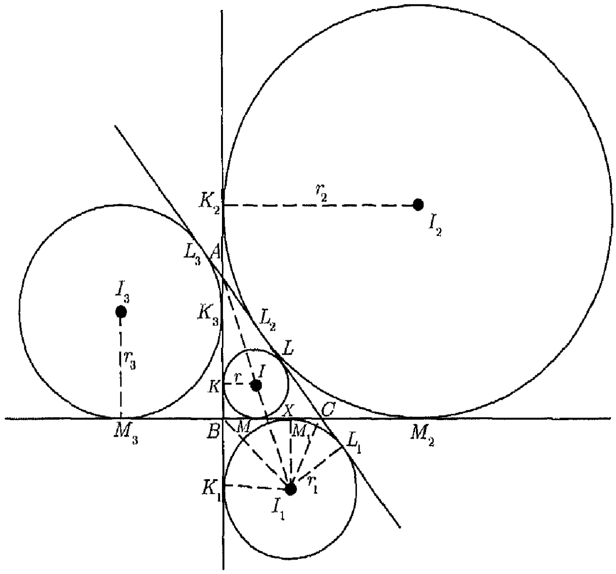
البرهان

على الشكل 3 – 7 :

$$\left[\Delta ABC\right]=\left[\Delta ABI_1\right]+\left[\Delta ACI_1\right]-\left[\Delta BCI_1\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(I_1K_1\right)\left(AB\right)+\frac{1}{2}\left(I_1L_1\right)\left(AC\right)-\frac{1}{2}\left(I_1M_1\right)\left(BC\right)$$
$$=\frac{1}{2}r_1c+\frac{1}{2}r_1b-\frac{1}{2}r_1a=\frac{1}{2}r_1\left(c+b-a\right)=r_1\left(s-a\right)$$
$$\Rightarrow r_1=\frac{\left[\Delta ABC\right]}{s-a}$$

وبالمثل يمكننا استنتاج أن :

$$r_2 = \frac{[\Delta ABC]}{s-b} \qquad , \qquad r_3 = \frac{[\Delta ABC]}{s-c} \bullet.$$



شكل 3 — 7

والآن لنجرب أن نضرب النتائج التي توصلنا إليها في النظريتين 10—7 ,9—7.

سنحصل على :

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \frac{[\Delta ABC]}{s} \cdot \frac{[\Delta ABC]}{s-a} \cdot \frac{[\Delta ABC]}{s-b} \cdot \frac{[\Delta ABC]}{s-c}$$
$$= \frac{\left([\Delta ABC]\right)^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

سيذكرك المقام في العلاقة السابقة بصيغة هيرون Heron's formula لإيجاد مساحة أي مثلث

$$[\Delta ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

إذن: $\left([\Delta ABC]\right)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ ، وبالتعويض نجد أن:

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \left([\Delta ABC]\right)^2$$

ويمكننا صياغة هذا الذي توصلنا إليه في النظرية التالية.

نظرية: 7-11 حاصل ضرب أطوال أنصاف أقطار دوائر المثلث الأربع يساوي مربع مساحته.

وكذلك يمكننا باستخدام نفس النظريتين $10-7$, $9-7$ الوصول للنظرية التالية.

نظرية: 7-12 مقلوب طول نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث يساوي مجموع مقلوبات أنصاف أقطار الدوائر الخارجية الثلاث لنفس المثلث.

البرهان

من نظرية $10-7$:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{s-a}{[\Delta ABC]}+\frac{s-b}{[\Delta ABC]}+\frac{s-c}{[\Delta ABC]}=\frac{3s-(a+b+c)}{[\Delta ABC]}$$
$$=\frac{3s-2s}{[\Delta ABC]}=\frac{s}{[\Delta ABC]}$$

من نظرية $9-7$:

$$\frac{1}{r}=\frac{s}{[\Delta ABC]}$$

إذن :

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}.\bullet$$

هناك علاقات مماثلة تحتوى الارتفاعات h_a, h_b, h_c للمثلث ABC ، نثبتها في النظرية التالية.

نظرية 7–13 مجموع مقلوبات أطوال ارتفاعات المثلث يساوي مقلوب طول نصف قطر الدائرة الداخلية لنفس لمثلث.

البرهان

بداية لبرهاننا، سنقدم مساحة ΔABC بعدة طرق كما يلي

$$[\Delta ABC]=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$
$$2([\Delta ABC])=ah_a=bh_b=ch_c$$

من نظرية $9-7$ ، لدينا $[\Delta ABC]=sr$ ، وبالتعويض نجد أن :

$$2sr=ah_a=bh_b=ch_c \Leftrightarrow \frac{2s}{\frac{1}{r}}=\frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

إذن :

● $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}}$ ، أو $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

ومن النتيجة السابقة مع نظرية 12 – 7 نحصل على النظرية التالية :

نظرية: 7–14 مجموع مقلوبات أطوال ارتفاعات المثلث يساوي مجموع مقلوبات أنصاف أقطار الدوائر الخارجية الثلاث لنفس المثلث.

ويمكننا التعبير رياضيا عن نظرية 14 – 7 على الصورة :

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

وفي نهاية دراستنا للدوائر الأربع للمثلث ، سنختتم ذلك بإيجاد العلاقة بين أنصاف أقطار هذه الدوائر ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث والتي تمر برؤوسه ، وهذا ما سنقدمه في النظرية 15 – 7.

نظرية: 7–15 مجموع أطوال أنصاف أقطار الدوائر الخارجية لمثلث يساوي طول نصف قطر الدائرة الداخلية مضافاً إليه أربعة أمثال نصف قطر الدائرة المحيطة بنفس المثلث.

البرهان

ليكن قطر الدائرة O المحيطة بالمثلث ABC هو $\overline{YZ}$ ، والذي حتما يمر بالنقطة X التي هي منتصف $\overline{BC}, \overline{MM_1}$ (نظرية 5 – 7). إذن ، $\overline{YZ} \perp \overline{BC}$ ، و ($\overline{YZ} \perp \overline{M_2M_3}$) ، انظر الشكل 4 – 7.

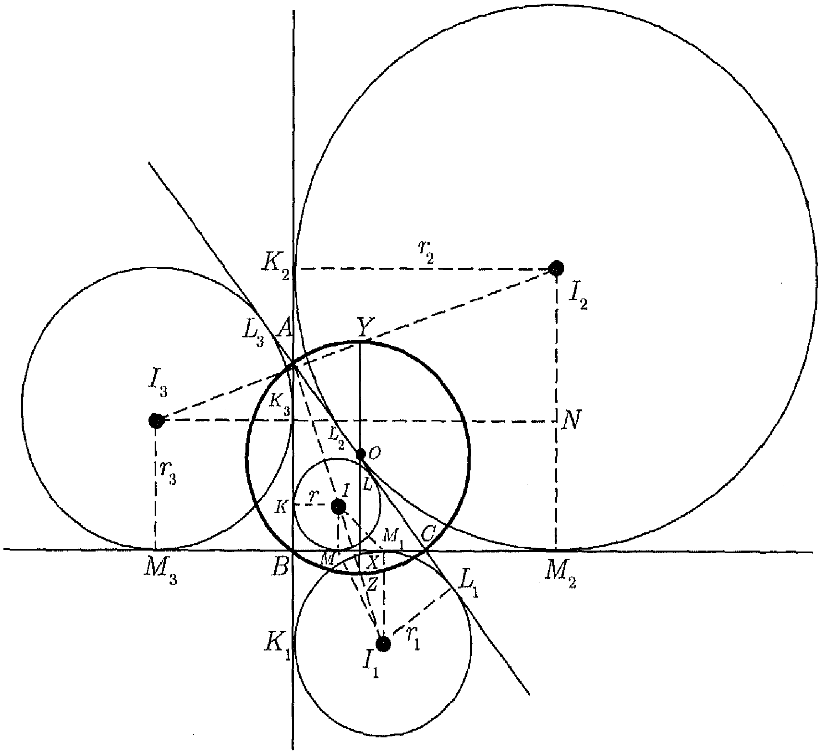
ولأن $\overline{YX}$ قاعدة متوسطة في شبه المنحرف $M_3I_3I_2M_2$:

$$YX = \frac{1}{2}\left(I_2M_2 + I_3M_3\right) = \frac{1}{2}\left(r_2 + r_3\right)$$

ولأن طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي قطري شبه المنحرف تساوي نصف الفرق بين طولي القاعدتين المتوازيتين ، إذن في شبه المنحرف MIM_1I_1 :

$$XZ = \frac{1}{2}\left(M_1I_1 - MI\right) = \frac{1}{2}\left(r_1 - r\right)$$

وأخيراً لنعمل على نصف قطر الدائرة المحيطة R :



شكل 4 – 7

$$2R = YX + XZ$$

$$2R = \frac{1}{2}\left(r_2 + r_3\right) + \frac{1}{2}\left(r_1 - r\right)$$

$$4R = r_1 + r_2 + r_3 - r$$

$$4R + r = r_1 + r_2 + r_3 \bullet.$$

وأخيراً، لنعط قليلاً من الانتباه لمراكز دوائر المثلث الأربع وأبعادها عن مركز الدائرة المحيطة، وستكون أولى نظرياتنا هي التي قدمها أويلر (١٧٠٧ — ١٧٨٣) Leonhard Euler.

نظرية: 7–16 المسافة d بين مركز الدائرة الداخلية ومركز الدائرة المحيطة بالمثلث يمكن الحصول عليها من العلاقة :

$$d^2 = R\left(R - 2r\right)$$

البرهان

لأن Z منتصف $\widehat{BC}$ ، فإنه لابد أن يمر $\overrightarrow{AI}$ بالنقطة Z (انظر الشكل 5 – 7).

لنرسم $\overleftrightarrow{IO}$ يقطع الدائرة O في النقطتين D, E. ولنفرض أن $IO = d$ ، إذن :

$$\left(AI\right)\left(IZ\right) = \left(DI\right)\left(IE\right) = \left(R - d\right)\left(R + d\right)$$

لاحظ في الرباعي $BICI_1$ أن $\overline{BI} \perp \overline{BI_1}, \overline{CI} \perp \overline{CI_1}$ (منصفان خارجي وداخلي لزاوية واحدة)، وهذا يعنى أن $BICI_1$ رباعي دائري. ولأن مركز هذا الرباعي الدائري يتعين من تقاطع المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{BC}$ (الذي هو $\overline{OXZ}$) والقطر $\overline{II_1}$ ، وتكون نقطة التقاطع هي Z ، إذن، $IZ = CZ$ ، وبالتعويض نجد أن :

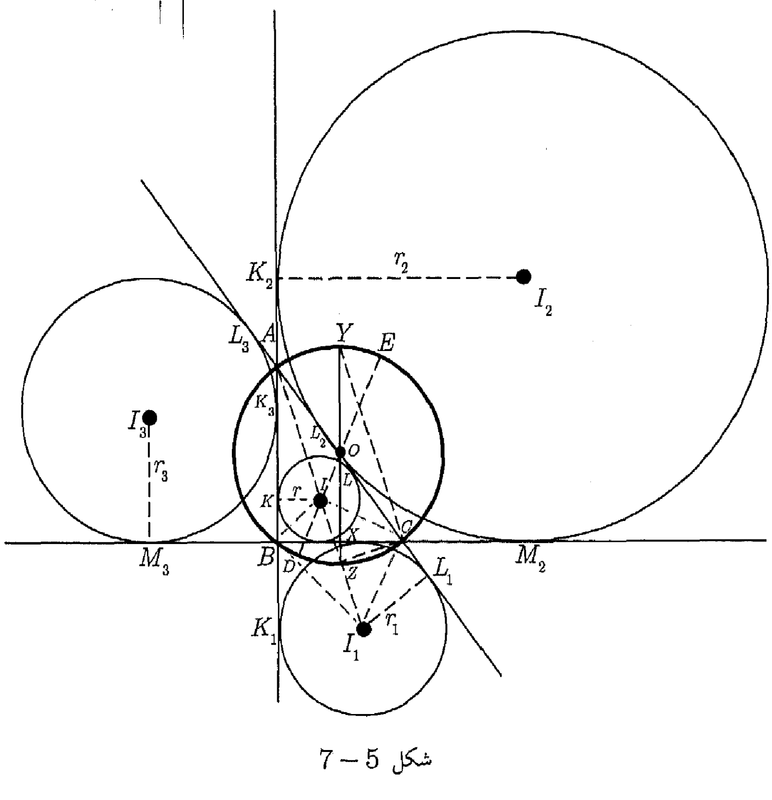
$$\left(AI\right)\left(CZ\right) = R^2 - d^2 \qquad \text{(I)}$$

ولأن $m\angle CYZ = \frac{1}{2} m\widehat{CZ} = m\angle CAZ, m\angle BAZ = m\angle CAZ$ ، فإن :

$$m\angle CYZ = m\angle BAZ$$

إذن ؛ المثلثان القائمان YZC, AIK متشابهان.

$$\Rightarrow \frac{AI}{YZ} = \frac{IK}{CZ} \Leftrightarrow (AI)(CZ) = (IK)(YZ)$$



شكل 5 – 7

إذن،

$$\left(AI\right)\left(CZ\right)=\left(r\right)\left(2R\right) \qquad \left(\mathrm{II}\right)$$

من $\left(\mathrm{I}\right),\left(\mathrm{II}\right)$:

$$R^2-d^2=2Rr \Rightarrow d^2=R\left(R-2r\right).\bullet$$

ولاستكمال مناقشتنا حول المسافات بين مراكز تلك الدوائر، ستعطينا النظرية القادمة العلاقة بين المسافات بين مركز الدائرة المحيطة ومراكز الدوائر الثلاث الخارجية للمثلث.

نظرية: 7–17 المسافات بين مركز الدائرة المحيطة ومراكز الدوائر الثلاث الخارجية يمكن الحصول عليها من العلاقات

$$\left(OI_1\right)^2=R\left(R+2r_1\right)$$
$$\left(OI_2\right)^2=R\left(R+2r_2\right)$$
$$\left(OI_3\right)^2=R\left(R+2r_3\right)$$

يمكن برهان هذه النظرية مثلما تعاملنا مع برهان النظرية 16 – 7 ؛ ولذا نترك برهانها كتمرين.

وفي الختام، ينبغي أن يوفر لك هذا الفصل كثيراً من الفهم حول العلاقات المتبادلة بين الدوائر الخارجية والدائرة الداخلية والدائرة المحيطة بالمثلث، ولكن هذا لا يعني أننا انتهينا كلياً من هذا الموضوع . والتدريبات التالية هي بمثابة نقطة انطلاق لإجراء مزيد من البحث في هذا الإطار.

تدريبات

1. أثبت أنه إذا كان طول نصف قطر الدائرة الداخلية لمثلث يساوي نصف طول نصف قطر الدائرة المحيطة به، فإن هذا المثلث يكون متطابق الأضلاع.

2. بالاستعانة بالشكل (1 − 7)، أثبت أن :

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}$$

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}$$

$$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}$$

3. أثبت أن مساحة المثلث القائم تساوي حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الناتجين من نقطة تماس الدائرة الداخلية مع الوتر.

4. أثبت أن $Rr=\frac{abc}{4s}$.

5. أثبت أن $R=\frac{abc}{4\left(area\ \Delta ABC\right)}$.

6. أثبت أن النسبة بين مساحة مثلث إلى مساحة المثلث الذي رؤوسه نقاط تماس الدائرة الداخلية للمثلث الأول تساوي ضعف طول نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث الأول إلى طول نصف قطر الدائرة الداخلية له.

7. أثبت أن : $r_1=\sqrt{\frac{s\left(s-b\right)\left(s-c\right)}{\left(s-a\right)}}$.

8. أثبت أن مجموع المسافات من مركز الدائرة المحيطة بمثلث إلى أضلاع هذا المثلث يساوي مجموع نصف قطر الدائرة المحيطة و نصف قطر الدائرة الداخلية لنفس المثلث.

9. أثبت صحة نظرية 17 − 7.

10. أثبت أنه إذا مر خط مستقيم برأس مثلث وقطع دائرتين من دوائره الخارجية ، فإن حاصل ضرب مسافتين من هذه الرأس إلى نقطتين من نقاط التقاطع تساوي حاصل ضرب المسافتين الأخريين من نفس الرأس إلى النقطتين الباقيتين من نقاط التقاطع.

11. أثبت أن المستقيمات الماسة لدائرة داخلية لمثلث وتوازي أضلاع هذا المثلث تجتزئ من هذا المثلث ثلاثة مثلثات مجموع محيطاتها يساوي محيط المثلث الأصلي.

12. أثبت أن مجموع طولي ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية مطروحاً منه طول الوتر يساوي طول قطر الدائرة الداخلية لهذا المثلث .

13. أثبت أن :

$$h_a = \frac{2rr_1}{r_1 - r}$$

$$h_b = \frac{2rr_2}{r_2 - r}$$

$$h_c = \frac{2rr_3}{r_3 - r}$$

14. أثبت أن :

$$h_a = \frac{2r_2r_3}{r_2 + r_3}$$

$$h_b = \frac{2r_1r_3}{r_1 + r_3}$$

$$h_c = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$$

15. بالاستعانة (بالشكل 5 – 7)، أثبت أن :

$$\left(OI\right)^2 + \left(OI_1\right)^2 + \left(OI_2\right)^2 + \left(OI_3\right)^2 = 12R^2$$

16. بالاستعانة (بالشكل 5 – 7)، أثبت أن :

$$\left(II_1\right)^2+\left(II_2\right)^2+\left(II_3\right)^2=8R\left(2R-r\right)$$

17 . أثبت أنه إذا كانت r_a, r_b, r_c أنصاف أقطار الدوائر الخارجية للمثلث والتي تمس على الترتيب أضلاعه a, b, c فإن :

$$r_a=\frac{rs}{s-a}=\sqrt{\frac{s\left(s-b\right)\left(s-c\right)}{s-a}}$$

$$r_b=\frac{rs}{s-b}=\sqrt{\frac{s\left(s-a\right)\left(s-c\right)}{s-b}}$$

$$r_c=\frac{rs}{s-c}=\sqrt{\frac{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)}{s-c}}$$

الفصل الثامن

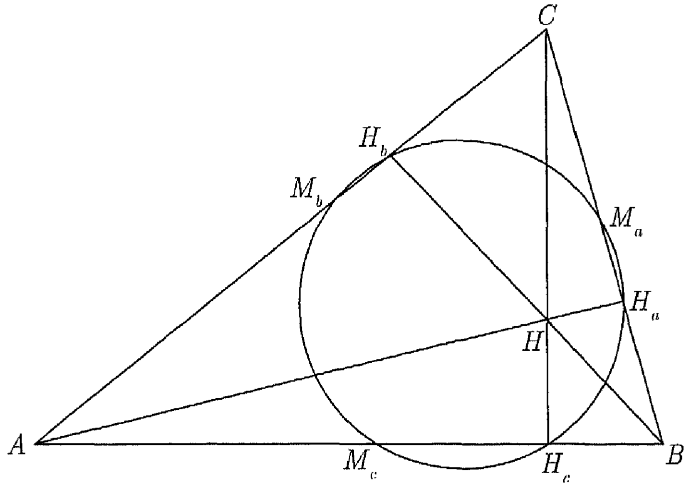
دائرة النقاط التسع

نبذة حول دائرة النقاط التسع

لعل من أكثر الأمور إمتاعاً في الهندسة هو أن تلاحظ كيف أن شكلاً واحداً ينتج لنا عدداً لا نهاية له من الخصائص والعلاقات، وأمثلتنا على ذلك تبدأ بتسع نقاط محددة على المثلث وهي :

- منتصفات أضلاع المثلث.
- مساقط ارتفاعات المثلث على أضلاعه.
- منتصفات القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث ورؤوسه.

هذه النقاط بينها علاقة محددة هي أنها تقع جميعاً على دائرة واحدة ، تسمى دائرة النقاط التسع للمثلث (انظر الشكل 1 – 8).



شكل 1 – 8

وبعد أن نثبت أن هذه النقاط التسع تقع على دائرة واحدة، سنقوم ببحث العديد من الخصائص الخاصة بهذه الدائرة الشهيرة وسنستطرد قليلاً لنطور بعض الخصائص الخاصة بارتفاعات المثلث.

أثبت ليونارد أويلر Leonhard Euler في العام ١٧٦٥ أن ست نقاط من هذه النقاط تمر بها دائرة وحيدة وكانت هذه النقاط هي منتصفات أضلاع المثلث ومساقط ارتفاعاته على هذه الأضلاع، وظل ذلك قائماً حتى عام ١٨٢٠ حين قدم تشارلز جوليان براينشون و جان فيكتور بونسيليه Charles-Julian Brianchon & Jean Victor Poncelet ورقة بحثية أثبتا فيها أن النقاط الثلاث الباقية (منتصفات القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث ورؤوسه) تقع على نفس الدائرة، واستكملا في ورقتيهما أول برهان تام لهذه النظرية، وأطلقا عليها لأول مرة " دائرة النقاط التسع ".

و يُعزى جزء كبير من شهرة عالم الرياضيات الألماني الموهوب كارل فيلهلم فيورباخ (١٨٠٠– ١٨٣٤) Karl Wilhelm Feuerbach إلى ورقة بحثية قدمها في العام (١٨٢٢) قال فيها " الدائرة التي تمر بمساقط ارتفاعات المثلث على أضلاعه تمس أيضا الدوائر الأربع للمثلث (الدائرة الداخلية والثلاث دوائر الخارجية) " وهذه النظرية هي النظرية 18 – 8 في هذا الفصل. ونتيجة لعمله هذا سميت هذه النظرية باسمه " نظرية فيورباخ "، وفي بعض الأحيان يطلق على نظرية دائرة النقاط التسع نظرية فيورباخ.

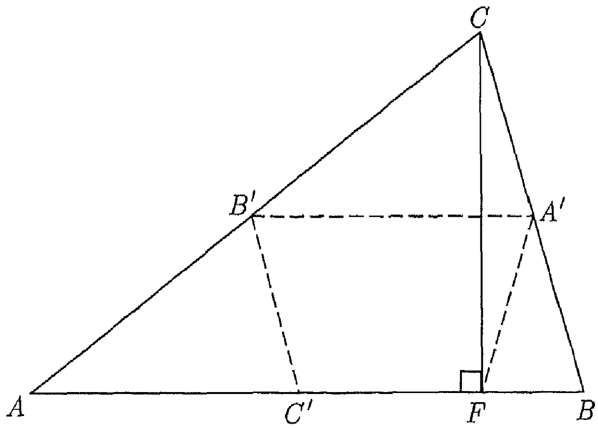
نظرية: 8–1 في أي مثلث، نقاط منتصفات أضلاعه ومساقط ارتفاعاته على أضلاعه و منتصفات القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع هذه الارتفاعات ورؤوسه، تقع جميعاً على دائرة واحدة.

البرهان

من أجل تبسيط مناقشتنا لبرهان هذه النظرية، سنقوم بدراسة كل جزء منها على حدة وعلى شكل منفصل، واضعين في أذهاننا أن الأشكال من 2 – 8 إلى 5 – 8 هي مجرد أجزاء من الشكل 6 – 8.

ففي ΔABC ، النقاط A', B', C' منتصفات الأضلاع $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ على الترتيب (انظر الشكل 2 – 8)، ولنعتبر $\overline{CF}$ ارتفاعاً في ΔABC ، ولأن $\overline{A'B'}$ متوسط في نفس المثلث، $\overline{A'B'} \parallel AB$ ، إذن الشكل الرباعي $A'B'C'F$ شبه منحرف، وبما أن $\overline{B'C'}$ متوسط أيضاً، إذن $B'C' = \frac{1}{2}BC$ ، ولأن $\overline{A'F}$ متوسط خارج من رأس القائمة في ΔBCF ، إذن $A'F = \frac{1}{2}BC$ ، وهذا يعني أن $B'C' = A'F$ ، ومنه شبه

المنحرف $A'B'C'F$ يكون متطابق الضلعين، أي أنه يوجد به زاويتان متقابلتان متكاملتان، أي أن الشكل $A'B'C'F$ رباعي دائري، وهذا يثبت لنا أن النقاط الأربع A', B', C', F (من أصل النقاط التسع) تقع على دائرة واحدة.

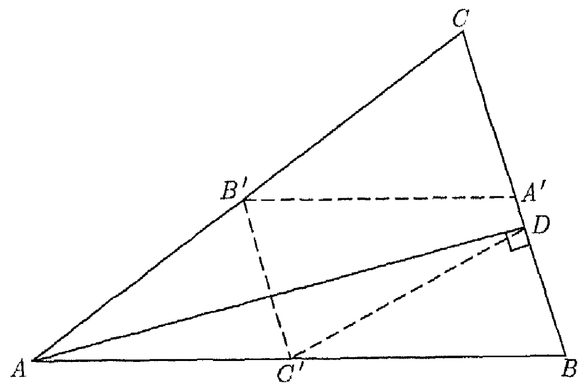


شكل $2-8$

ولتفادي الخلط والالتباس، سنرسم ΔABC الذي ارتفاعه $\overline{AD}$ (الشكل $3-8$) وباستخدام نفس الخطوات السابقة نستطيع إثبات أن الشكل $A'B'C'D$ رباعي دائري.

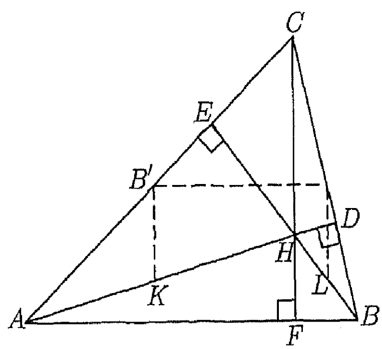
أي أننا الآن نملك خمس نقاط (A', B', C', F, D) من النقاط التسع تقع على دائرة واحدة.

وبتكرار ذلك مرة أخرى مع ارتفاع المثلث $\overline{BE}$ (انظر الشكل $4-8$) نصل إلى أن النقاط الست (A', B', C', F, D, E) تقع على نفس الدائرة.

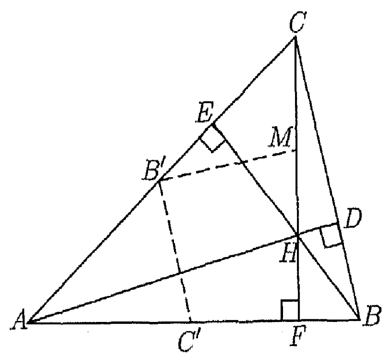


شكل 3 – 8

والآن، باعتبار النقطة H هي نقطة تقاطع ارتفاعات ΔABC ، نفرض أن النقطة M منتصف $\overline{CH}$ (انظر الشكل 4 – 8)، ومن ذلك تكون $\overline{B'M}$ قطعة واصلة بين منتصفي ضلعين في ΔACH ، وتوازي $\overline{AH}$ أو الارتفاع $\overline{AD}$ في ΔABC.



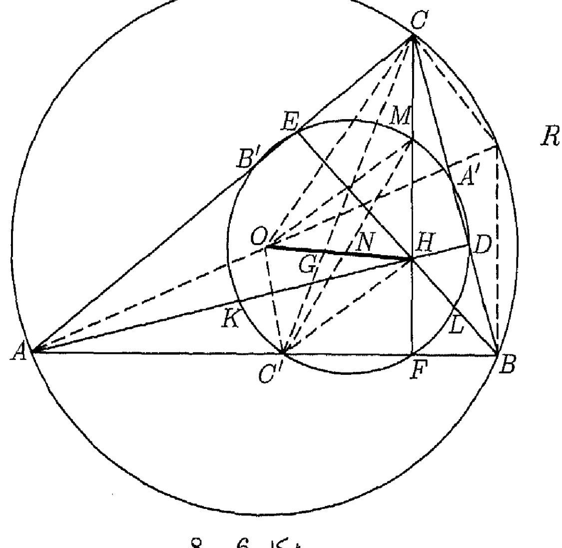
شكل 5 – 8



شكل 4 – 8

وبالمثل، بما أن $\overline{B'C'}$ واصلة بين منتصفي ضلعين في ΔABC ، $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ ، ولأن $\angle ADC, \angle MB'C'$ قائمتان، نستنتج أن الشكل $MB'C'F$ رباعي دائري (زاويتان متقابلتان متكاملتان)، وهذا يجعل النقطة M هي النقطة السابعة التي تنتمي لدائرتنا. وبتكرار نفس الإجراءات مع النقطة L التي هي منتصف $\overline{BH}$ (انظر الشكل 5 – 8) نحصل على أن $\angle B'A'L, \angle B'EL$ قائمتان أي أن النقاط B', E, A', L تقع على دائرة واحدة، حيث إنها رؤوس لرباعي دائري (فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان) ، أي أن النقطة الثامنة لدينا هي النقطة L .

ولتحديد موقع نقطتنا التاسعة والأخيرة بالنسبة للدائرة، لتكن النقطة K منتصف $\overline{AH}$ وكما سبق نجد أن $\angle A'B'K, \angle A'DK$ قائمتان مما يعطينا مرة أخرى رباعياً دائرياً هو $A'DKB'$ ، والنقطة K هي النقطة التاسعة التي تقع على الدائرة .وعلى ذلك نكون حددنا النقاط التسع للدائرة (انظر الشكل 6 – 8) . ●



شكل 6 – 8

والآن نحن جاهزون لبرهنة بعض الخواص الأساسية لدائرة النقاط التسع.

نظرية: 8–2 مركز دائرة النقاط التسع للمثلث هو نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع الارتفاعات ومركز الدائرة المحيطة لنفس المثلث.

البرهان

لأن $\overline{MC'}$ يقابل $\angle CFC'$ المحيطية القائمة في دائرة النقاط التسع للمثلث، إذن $\overline{MC'}$ قطر لهذه الدائرة ومن ذلك نقطة منتصفه N هي مركز دائرة النقاط التسع للمثلث (انظر الشكل $6-8$). نرسم $\overrightarrow{AO}$ ليقطع الدائرة المحيطة O في النقطة R ، ثم نرسم $\overline{CR}, \overline{BR}$ ، وحيث إن $\overline{OC'}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين في ΔARB فإن $\overline{OC'} \parallel \overline{RB}$ ، ولأن $\angle ABR$ قائمة (زاوية محيطية مرسومة في نصف دائرة)، أي أن كلاً من $\overline{CF}, \overline{RB}$ عمودي على $\overline{AB}$ ، أي أن $\overline{RB} \parallel \overline{CF}$ ، وبالمثل $\overline{BE} \parallel \overline{CR}$ ، أي أن لدينا متوازي الأضلاع $CRBH$ ، ومن ذلك $RB = CH$. ومرة أخرى، حيث إن $\overline{OC'}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين في ΔARB :

$$OC' = \frac{1}{2}\left(RB\right) = \frac{1}{2}\left(CH\right) = HM$$

ومن هذا نستنتج أن الشكل $OC'HM$ متوازي أضلاع (لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقين ومتوازيين)، ولكن قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر، إذن النقطة N التي هي منتصف $\overline{MC'}$ هي أيضاً منتصف $\overline{OH}$. ●

نظرية: 8–3 طول قطر دائرة النقاط التسع للمثلث تساوي طول نصف قطر الدائرة المحيطة لنفس المثلث.

البرهان

في الشكل $6-8$ نلاحظ أن $\overline{MN}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين في $\triangle OHC$ ،

إذن :

$$MN = \frac{1}{2}(OC)\,.$$ ●

في العام ١٧٦٥م قدم لينارد أويلر Leonhard Euler ورقة بحثية أثبت فيها أن نقطة تقاطع المتوسطات G في المثلث تثلث $\overline{OH}$ ، أي أن $OG = \frac{1}{3}(OH)$ ، وهذا الخط $\overrightarrow{OH}$ يطلق عليه خط أويلر Euler Line للمثلث.

نظرية: 8-4 نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث تقع على الثلث الأول من القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع الارتفاعات ومركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث، وذلك من جهة مركز الدائرة المحيطة.

البرهان

لقد أثبتنا قبل قليل أن $\overline{OC'} \parallel \overline{CH}$ ، وكذلك $OC' = \frac{1}{2}(CH)$ (انظر الشكل $6-8$) ومن ذلك نستنتج أن $\triangle OGC' \sim \triangle HGC\,(AA)$ بنسبة تشابه قدرها $\frac{1}{2}$ ؛ إذن :

$$OG = \frac{1}{2}(HG) \Rightarrow OG = \frac{1}{3}(OH)$$

والآن يبقى لنا إثبات أن G نقطة تقاطع المتوسطات للمثلث ABC ، ومن السهل إثبات ذلك فمن المثلثات اللذين أثبتنا تشابههما تواً :

$$C'G = \frac{1}{2}\left(GC\right) = \frac{1}{3}\left(C'C\right)$$

وحيث إن $\overline{C'C}$ متوسط في المثلث ، فإن النقطة G حتما هي نقطة تقاطع المتوسطات ؛ حيث لأنها تقسم المتوسط بنسبة $1:2$ من جهة الرأس . ●

من الشيق أن نلاحظ أن :

$$\frac{HN}{NG} = \frac{3}{1} = \frac{HO}{OG}$$

إذن ، $\overline{HG}$ تقسمها النقطة N داخلياً ، وأيضاً تقسمها O من الخارج بنفس النسبة وهذا ما يعرف باسم التقسيم التوافقي.

نظرية 8-5: جميع المثلثات المنشأة داخل دائرة معلومة ولها نفس نقطة تقاطع الارتفاعات لها أيضاً نفس دائرة النقاط التسع.

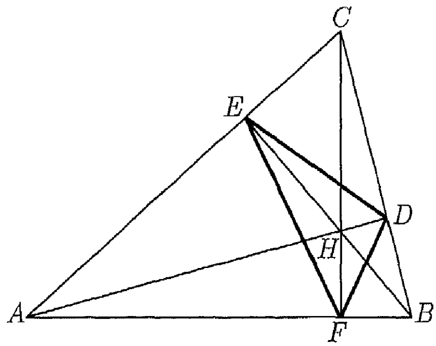
البرهان

لأن جميع المثلثات المنشأة داخل دائرة معلومة ولها نفس نقطة تقاطع الارتفاعات هي أيضاً لها نفس خط أويلر ، ولأن مركز دائرة النقاط التسع لجميع هذه المثلثات ثابت ويقع في منتصف خط أويلر (نظرية $8-2$) ، وكذلك لأن طول نصف قطر دائرة النقاط التسع لكل هذه المثلثات يساوي نصف طول نصف قطر الدائرة المحيطة (نظرية $8-3$) ، أي أن دوائر النقاط التسع لهذه المثلثات لها نفس نصف القطر ومركز ثابت ، وهذا يحتم أن تكون هناك دائرة نقاط تسع وحيدة لهذه المثلثات .

ارتفاعات المثلث Altitudes

لقد استخدمنا نظرية شيفا في الفصل الثاني من كتابنا هذا لإثبات أن ارتفاعات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة (انظر التطبيق الثاني صفحة 55) وقد أطلقنا على المثلث الذي رؤوسه مساقط أي نقطة داخل أي المثلث اسم مثلث المساقط Pedal

Triangle ، وفي حالة خاصة أو نوع خاص من مثلثات المساقط عندما تكون النقطة التي تخرج منها الأعمدة إلى أضلاع المثلث هي نقطة تقاطع الارتفاعات الأصلية للمثلث Orthocenter فإننا نطلق على مثلث المساقط هذا اسم مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث Orthic triangle (أي المثلث التي تعينه نقاط تقاطع ارتفاعات المثلث مع أضلاع هذا المثلث. ففي الشكل 7 – 8 ، مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث هو ΔDEF. ووفقاً لنظرية 8 – 6 ΔABC يشابه كلاً من $\Delta DEC, \Delta AEF, \Delta DBF$.



شكل 7 – 8

نظرية: 8–6 مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث يجزئ المثلث الأصلي إلى ثلاثة مثلثات كل منها يشابه المثلث الأصلي.

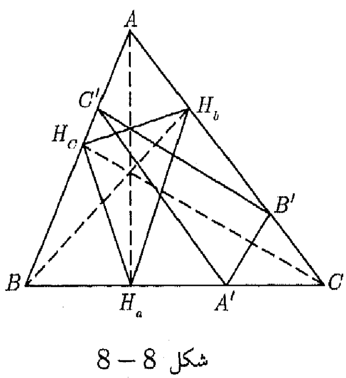
البرهان

سنثبت أن $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ (شكل 7 – 8). وسنحتاج فقط من أجل استكمال البرهان تكرار ما قمنا به مع $\Delta AEF, \Delta DBF$.

الشكل $AEDB$ رباعي دائري لأن $\angle AEB \cong \angle ADB = 90^\circ$ ؛ إذن $\angle EAB, \angle EDB$ متكاملتان (زاويتان متقابلتان في الرباعي الدائري)، ولكن $\angle EDC, \angle EDB$ متكاملتان ؛ إذن $\angle EAB \cong \angle EDC$ ، ولأنه أيضاً $\angle C$ مشتركة بين المثلثين ، فإن $\Delta ABC \sim \Delta DEC$. وبالمثل نستطيع إثبات أن $\Delta ABC \sim \Delta AEF$ (استخدم الرباعي الدائري $ECBF$)، وكذلك $\Delta ABC \sim \Delta DBF$ (استخدم الرباعي الدائري $AFDC$).●

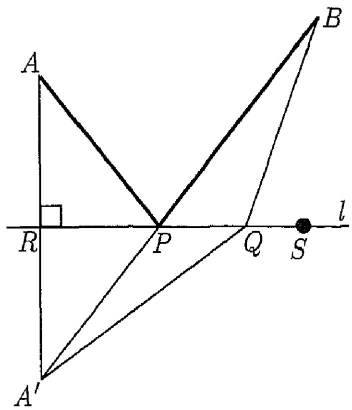
الميزة الخاصة بمثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث التي أتت على النحو المنصوص عليه في نظرية 6 – 8 تقودنا لحقيقة شيقة أخرى حول هذا المثلث، فحواها أنه إذا أنشئ مثلث داخل مثلث بحيث تقع رؤوس المثلث الثاني على أضلاع المثلث الأول، فأي من المثلثات الحادة الزوايا يمكن أن يكون المثلث الثاني (المنشأ داخل المثلث الحاد الزوايا) هو الأقل في طول محيطه. ستخبرنا نظرية 7 – 8 عن أن هذا المثلث هو مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث.

نظرية: 8–7 لأي مثلث منشأ داخل مثلث حاد الزوايا، يكون محيط المثلث المنشأ أقل ما يمكن إذا كان هذا المثلث المنشأ هو مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث (انظر شكل 8 – 8).



شكل 8 – 8

يعتمد برهان هذه النظرية اعتماداً كبيراً على نظرية أخرى يتم تدريسها في المرحلة الثانوية وتنص على أن "أقصر مسار من نقطة معلومة إلى مستقيم معلوم ثم إلى نقطة أخرى تقع في نفس



شكل 9 − 8

الاتجاه هو المسار الذي يشكل زاويتين متطابقتين مع المستقيم المعلوم ". فعلى سبيل المثال لتكن النقطتان A, B في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم l (انظر شكل 9 − 8)،

ولتكن كذلك A' صورة A حول l.

إذن : $\overline{AA'} \perp l$ ، $AR = A'R$ ،

وحيث إن النقطة P هي نقطة تقاطع $\overline{A'B}$ مع l فمن السهل إثبات أن $AP + PB$ أقصر مسافة من A إلى l إلى B. ولأن $\angle APR \cong \Delta A'PR$ ،

نستنتج أن $\angle A'PR \cong \angle BPS$ (وهي خاصية هامة لإيجاد أقل محيط). ولإثبات أن $AP + PB$ أقل مسافة مطلوبة ، نختار نقطة ولتكن Q تنتمي للمستقيم l بحيث لا تقع على النقطة P. والآن $A'B < A'Q + QB$ ، أو $A'P + PB < A'Q + QB$ ، وهذا يجعل اختيار النقطة P هو الذي يحقق أقل مسافة مطلوبة ، والآن نحن جاهزون لإثبات نظرية 7 − 8.

البرهان

في إثبات نظرية 6 − 8 ، توصلنا إلى أن مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث يجزئ المثلث الأصلي إلى ثلاثة مثلثات كل منها يشابه المثلث الأصلي ؛ وهذا يجعلنا بسهولة نستنتج أن $\angle AEF \cong \angle CED$ (شكل 7 − 8)

$\angle BDF \cong \angle CDE$ ، $\angle BFD \cong \angle AFE$. إذن أقل مسار طولاً من النقطة E إلى $\overleftrightarrow{AB}$ إلى النقطة D هو $EF + FD$ ، بالمثل أقل مسار طولاً من النقطة E إلى $\overleftrightarrow{CB}$ إلى النقطة F هو $ED + DF$ ، وأقل مسار طولاً من النقطة D إلى $\overleftrightarrow{AC}$ إلى النقطة F هو $DF + EF$ ، وهذا يعني أن ΔEDF المنشأ داخل المثلث الحاد الزوايا ABC له أقل طول محيط ممكن.

ولمقارنة محيط أي مثلث آخر منشأ داخل ΔABC مع مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث EDF ، سنجد بسهولة أن محيط ΔEDF هو الأقل. ●

من الزوايا التي أثبتنا تطابقها سابقاً يمكننا الوصول لخاصية جديدة تطور عملنا على مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث. فنلاحظ من كون $\angle BFD \cong \angle AFE$ ، وكون الزاويتان $\angle EFC$ ، $\angle AFE$ متتامتين (مجموع قياسهما يساوي $90°$)، وكذلك كون $\angle DFC, \angle DFB$ أيضاً متتامتين ؛ لذا نستنتج أن :

$$\angle EFC \cong \angle DFC$$

وبشكل عام نقدم ذلك في النظرية التالية 8 – 8.

نظرية: 8–8 ارتفاعات المثلث الحاد الزوايا تنصف زوايا مثلث المساقط.

بالنظر إلى التطبيق رقم ٥ في الفصل الثاني ، ندرك كم هو ممتع أن نرى كيف لبرهان هذا التطبيق أن يستخدم في حالات أخرى ، فنحن الآن نملك نقطة تقاطع ارتفاعات ΔABC التي هي في نفس الوقت مركز الدائرة الداخلية للمثلث EDF (انظر شكل 7 – 8).

وقبل التوسع في العمل على الشكل 7 – 8 ، لندرس معاً النظرية البسيطة التالية.

نظرية: 8–9 نقطة تقاطع الارتفاعات في المثلث تقسم الارتفاع إلى جزأين ، حاصل ضرب كل زوج منهما يساوي حاصل ضرب الزوجين الآخرين.

البرهان

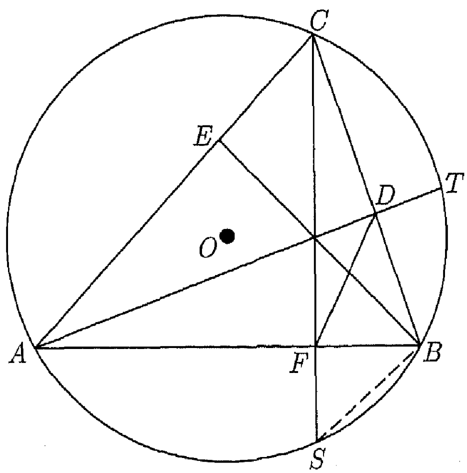
لأن $\Delta AFH \sim \Delta CDH$ (انظر الشكل 7 – 8)، $\frac{HD}{HF}=\frac{CH}{AH}$ ويمكن التعبير عن هذا التناسب كالتالي :

$$(CH)(HF)=(AH)(HD)$$

ويكتمل برهاننا باستخدام زوج آخر من المثلثات المتشابهة بنفس الطريقة السابقة .●

والآن عند دراستنا للدائرة O المحيطة بالمثلث ABC (انظر الشكل 10 – 8)، وبفرض أن $\overrightarrow{CF}$ يقطع O في النقطة S. نلاحظ أن $\overline{AB}$ تنصف $\overline{HS}$ ، وهذا ما تعممه النظرية التالية.

نظرية: 8–10 القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع الارتفاعات في مثلث ونقطة تقاطع الارتفاع (امتداده من جهة مسقطه) مع الدائرة المحيطة بهذا المثلث، ينصفها ضلع المثلث.



شكل 10 – 8

البرهان

لاحظ أن $\angle CSB \cong \angle CAB$ (لأنهما زاويتان محيطيتان في دائرة واحدة تحصران نفس القوس، $\widehat{BC}$) (انظر الشكل 10 – 8). في ΔACF ، الزاويتان $\angle ACF, \angle CAF$ متتامتان، وكذلك أيضاً في ΔCEH ، الزاويتان $\angle ECH, \angle CHE$ متتامتان ، ولكن $\angle BHF \cong \angle CHE$ ، إذن : $\angle CAF \cong \angle BHF$. لأن كلاً من $\angle CSB, \angle BHF$ تطابق $\angle CAB$ ، إذن هما متطابقتان، مما يعني أن ΔHBS متطابق الضلعين، أي أن $\angle BFS \cong \angle BFH$ ، $HF = SF$ وهذا يثبت النظرية لارتفاع واحد من ارتفاعات المثلث الثلاثة. بخطوات مماثلة لهذا البرهان، نثبت النظرية لباقي الارتفاعات في المثلث .●

نظريتنا التالية تثبت أن الرأس B منتصف القوس TS (انظر الشكل 10 – 8).

نظرية: 8–11 رأس المثلث هي نقطة منتصف قوس الدائرة المحيطة المحصور بين امتدادي ارتفاعين من ارتفاعات المثلث من جهة مسقطيهما (انظر الشكل 10 – 8).

البرهان

الرباعي $AFDC$ (الشكل 10 – 8) دائري لأن $\angle AFC \cong \angle ADC$ (قائمتان)، إذن:

$$\angle FAD \cong \angle DCF$$

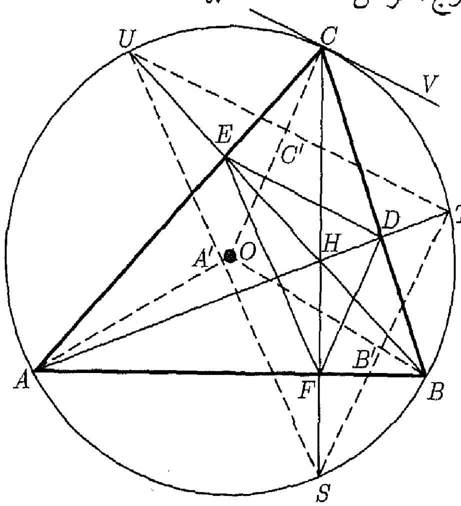
ومن ذلك نستنتج أن:

$$\widehat{SB} \cong \widehat{TB}$$

(زاويتان محيطيتان متطابقتان مرسومتان في دائرة واحدة لهما قوسان متطابقان).

تذكر أن ما يمكن إثباته على زوج من الارتفاعات هو صحيح لأي زوج آخر من ارتفاعات المثلث الثلاثة .●

ما سبق يقودنا إلى زوج آخر من المثلثات المتشابهة .



شكل 11 − 8

نظرية: 8−12 المثلث الذي رؤوسه تقاطع امتدادات ارتفاعات المثلث مع الدائرة المحيطة يشابه مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث ، وتتوازى أضلاعهما المتناظرة .

البرهان

لقد أثبتنا في النظرية 10 − 8 أن $HF = SF, HD = TD$ (انظر الشكل 11 − 8) ؛ إذن في ΔHST ، $\overline{DF}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين

تــوازي $\overline{ST}$ ، وبــنفس الخطــوات ســنثبت أن $\overline{DE} \parallel \overline{TU}$ ، $\overline{EF} \parallel \overline{US}$ ، ومــن ذلك $\Delta DEF \sim \Delta TUS$. ●

تمنحنا نظرية $8-12$ مزيداً من الحركة نحو الحصول على علاقات أخرى مفيدة تساعدنا على استكمال دراسة دائرة النقاط التسع.

نظرية: 8-13 أنصاف أقطار الدائرة المحيطة بالمثلث التي تحوي رؤوسه عمودية على أضلاع مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث الأصلي المقابلة لها.

البرهان

سوف نقوم بإثبات هذه النظرية لنصف قطر واحد ونترك إثبات القطرين الآخرين للقارئ.

علــى الــشكل ($8-11$)، $\overline{OC}$ نــصف قطــر الــدائرة المحيطــة لكــل مــن $\Delta ABC, \Delta STU$. مـن نظريـة $8-11$ ، $\widehat{TC} \cong \widehat{UC}$ ؛ إذن $\overline{OC}$ عمـودي وينـصف $\overline{TU}$ ، ولأن $\overline{OC} \perp \overline{TU}$ فـإن $\overline{OC}$ أيضاً عمـودي علـى $\overline{DE}$ (لأننـا في نظرية $8-12$ قد أثبتنا أن $\overline{DE} \parallel \overline{TU}$).●

والآن سنقدم نظرية لابد أن تعقب النظرية السابقة.

نظرية: 8-14 مماسات الدائرة المحيطة بالمثلث عند رؤوسه توازي الأضلاع المناظرة لها من مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث الأصلي.

البرهان

مرة ثانية سنقوم بإثبات النظرية لضلع واحد من مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث. $\overline{OC}$ عمودي على المماس $\overleftrightarrow{VC}$ (الشكل $11-8$)، ولكن $\overline{DE} \perp \overline{OC}$ (نظرية $13-8$)، إذن $\overleftrightarrow{VC} \parallel \overline{DE}$ وبنفس الطريقة تتحقق العلاقة مع الأضلاع الأخرى من مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث. ●

دائرة النقاط التسع — مرة أخرى

نعود الآن لدراستنا لخواص دائرة النقاط التسع ونقدم في الجزء القادم خاصيتين تعتبران نتيجتين مباشرتين للنظريتين $14-8$، $13-8$.

نظرية 8-15: مماسات دائرة النقاط التسع للمثلث عند نقاط منتصفات أضلاعه توازي الأضلاع المناظرة من مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث الأصلي.

البرهان

نصف القطر $\overline{NC'}$ لدائرة النقاط التسع عمودي على $\overleftrightarrow{C'W}$ (انظر الشكل $12-8$). بتطبيق نظرية $13-8$ ، $\overline{DE} \perp \overline{OC}$ ، ولقد أثبتنا سابقاً أن $\overline{MN}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين في ΔCOH ، إذن :

$$\overline{MN} \parallel \overline{OC}$$

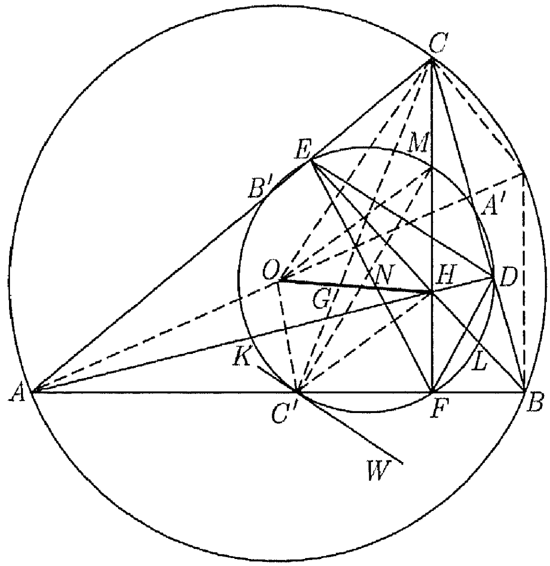
وهذا يؤدي إلى أن :

$$\overline{MNC'} \parallel \overline{OC} \text{ ،}$$

أي أن :

$$\overleftrightarrow{C'W} \parallel \overline{DE}$$

وبنفس الطريقة يمكننا إثبات النظرية على الضلعين الباقيين من المثلث .●



شكل 12 – 8

نظرية: 8-16 مماسات دائرة النقاط التسع عند منتصفات أضلاع المثلث توازي مماسات الدائرة المحيطة عند رؤوس هذا المثلث.

البرهان

لأن كلاً من مماسات دائرة النقاط التسع عند منتصفات أضلاع المثلث ، ومماسات الدائرة المحيطة عند رؤوس هذا المثلث ، توازي أضلاع مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث. إذن هما متوازيان .●

يتكون نظام نقاط تقاطع الارتفاعات orthocentric system من أربع نقاط ، كل منها هو نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث الذي رؤوسه النقاط الثلاث المتبقية ، ففي الشكل $12-8$ ، النقاط A, B, C, H تشكل نظاماً لنقاط تقاطع الارتفاعات وذلك كالتالي :

- H نقطة تقاطع الارتفاعات في ΔABC ؛
- A نقطة تقاطع الارتفاعات في ΔBCH ؛
- B نقطة تقاطع الارتفاعات في ΔACH ؛
- C نقطة تقاطع الارتفاعات في ΔABH .

نظرية: 8-17 المثلثات الأربعة لنظام نقاط تقاطع الارتفاعات لها نفس دائرة النقاط التسع.

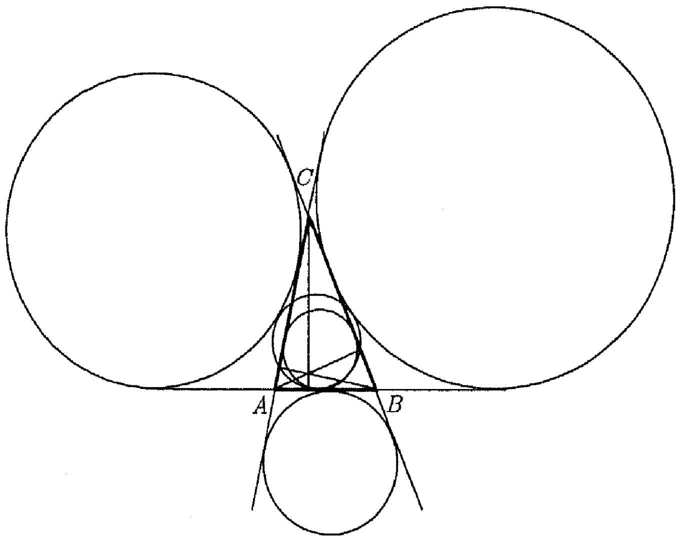
البرهان

برهان هذه النظرية متروك للقارئ ، حيث يتطلب ذلك التأكد من أن كلاً من النقاط التسع لكل من المثلثات الأربعة تقع على نفس الدائرة N . ●

تعد الخاصية التي تربط بين دائرة النقاط التسع للمثلث من جهة والدوائر الخارجية و الدائرة الداخلية لنفس المثلث من جهة أخرى واحدة من أشهر خصائص دائرة النقاط التسع والتي اكتشفها وبرهنها الرياضي الألماني كارل فيلهلم فيورباخ Karl Wilhelm Feuerbach في عام ١٨٢٢م. وهي تنص على ما يلي

نظرية: 8-18 (**نظرية فيورباخ**) دائرة النقاط التسع للمثلث تمس كلاً من الدوائر الخارجية والدائرة الداخلية لنفس المثلث. (انظر الشكل $13-8$).

يعد برهان هذه الخاصية معقد إلى حد بعيد، ولكنه في ذات الوقت مفيد، والقارئ المهتم سيجد أربعة براهين مختلفة لنظرية فيورباخ في كتاب الهندسة الحديثة Modern Geometry تأليف روجر أ. جونسون*. أما البرهان الذي استخدمه فيورباخ فقد اعتمد على حساب المسافات بين مركز دائرة النقاط التسع ومراكز كل من الدائرة الداخلية (p) والدائرة المحيطة (R)



شكل $13-8$

والدائرة الداخلية لمثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث (أو مثلث المساقط في صورته العامة) المثلث DEF في شكل $12-8$ ، ثم وضح أن هذه المسافات تساوي المجموع والفرق لأنصاف الأقطار المتناظرة.

* Roger A.Johnson: Modern Geometry ,Houghton Mifflin, 1929.pp.200-205

$$(OI)^2 = R^2 - 2Rp$$
$$(IH)^2 = 2p^2 - 2Rr$$
$$(OH)^2 = R^2 - 4Rr$$
$$(NI)^2 = \frac{1}{2}\left[(OI)^2 + (IH)^2\right] - (NH)^2 = \frac{1}{4}R^2 - Rp + p^2 = \left(\frac{1}{2}R - p\right)^2$$

لاحظ أن I هي مركز الدائرة الداخلية للمثلث، H هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث، O مركز الدائرة المحيطة.

تدريبات

1. أثبت أن مركز الدائرة المحيطة لأي مثلث هي نقطة تقاطع الارتفاعات للمثلث الذي رؤوسه نقاط المنتصف لأضلاع المثلث الأصلي.
2. أثبت أن أطوال ارتفاعات المثلث تتناسب عكسياً مع أطوال أضلاع هذا المثلث.
3. في الشكل 12 – 8 ، أثبت أن $\Delta A'B'C' \cong \Delta A'B'F$.
4. في الشكل 12 – 8 ، أثبت أن $\overline{CC'}, \overline{OM}$ ينصف كل منهما الآخر.
5. لماذا استخدمنا المثلث الحاد الزوايا فقط عند إثباتنا أن مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث له أقل طول محيط ممكن بين المثلثات المنشأة داخل المثلث الأصلي (نظرية 7 – 8)؟
6. ليكن $\overline{AM}$ هو ارتفاع المثلث ABC على الضلع $\overline{BC}$ حيث $M \in \overline{BC}$ ، ولتكن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث. أثبت أن $(BM)(MC) = k(AM)$. حيث k هي بعد H عن $\overline{BC}$.
7. أثبت أن قياس الزاوية المحصورة بين ارتفاع المثلث ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث والمشتركين في نفس الرأس يساوي الفرق بين قياسي زاويتي المثلث المتبقيتين.

8. أثبت أن الزاوية المحصورة بين ارتفاع المثلث ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث والمشتركين في نفس الرأس ينصفها منصف زاوية رأس المثلث الخارج منها ارتفاع المثلث ونصف قطر الدائرة المحيطة.
9. أثبت أن الدائرة المحيطة بمثلث تطابق الدائرة التي تمر برأسين من رؤوس هذا المثلث ونقطة تقاطع ارتفاعاته.
10. أثبت أن طول القطعة المستقيمة العمودية الخارجة من مركز الدائرة المحيطة بمثلث إلى أحد أضلاعه تساوي نصف طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث المقابلة لهذا الضلع ونقطة تقاطع ارتفاعات هذا المثلث.
11. أثبت أن مجموع أطوال ارتفاعات المثلث أقل من طول محيطه.
12. أثبت أن دائرة النقاط التسع للمثلث الذي رؤوسه أي ثلاث نقاط من النقاط التالية : مركز الدائرة الداخلية لمثلث ABC ، مراكز الدوائر الثلاث الخارجية للمثلث ABC ، تمر بالرؤوس A, B, C.
13. أثبت أن الخط المستقيم الذي تقع عليه نقطة تقاطع ارتفاعات مثلث ، ونقطة منتصف ضلع من أضلاع هذا المثلث يتقاطع مع قطر الدائرة المحيطة به والخارج من الرأس المقابلة لهذا الضلع في نقطة تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث.
14. أثبت أن مركز دائرة النقاط التسع لمثلث يقع على استقامة واحدة مع كل من نقطتي تقاطع العمودين الساقطين من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث على المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية الرأس ، ونقطة منتصف ضلع المثلث المقابل لهذه الرأس.
15. أثبت أنه إذا كان لمثلث رأس ثابتة ودائرة نقاط تسع ثابتة فإن المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تكون مركزاً للدائرة المحيطة بالمثلث تقع على دائرة.

الفصل التاسع

إنشاءات المثلث

مقدمة

من أقدم المسلمات المتعلقة بتطابق المثلثات تلك التي لها طابع إنشائي، فعلى سبيل المثال، نحن نستخدم وسائل الإنشاءات التقليدية (مسطرة غير مدرجة وفرجارين) مع الحقيقة التي تقول إن المثلثين يتطابقان إذا طابق في المثلث الأول ضلعان وزاوية محصورة نظائرهما في المثلث الآخر (SAS)، وعندها نحصل على مثلث وحيد له نفس الضلعان والزاوية المحصورة بينهما، بمعنى أنه إذا حاولنا رسم مثلث آخر بنفس الشروط والمعلومات (ضلعان وزاوية محصورة) فإننا لا محالة وبتكرار نفس خطوات الإنشاء سنحصل في نهاية المطاف على المثلث الذي يوافق المثلث الأول بجميع عناصره، ولن يكون هناك أي اختلاف سوى في وضع المثلث في المستوى. وهكذا نستطيع أن نقول إن المعلومات التي كانت لدينا حول المثلث (SAS) كافية لتعيين أو إنشاء المثلث.

في الماضي كنا نقوم بالإنشاءات التقليدية على الورق، ولكننا الآن وفي وقتنا الحاضر لدينا البرامج الحاسوبية التي تقدم لنا رسومات دقيقة.

الشكل $1-9$ يوضح لنا بعض التفاصيل الخاصة بالمثلث والتي سوف نقوم بدراستها خلال هذا الفصل من خلال قائمة منظمة يدعمها الفهم العام للمقصود بالرموز المستخدمة ودلالاتها في السياق الذي تقع فيه ، فعلى سبيل المثال قد نستخدم الرمز b إما للإشارة إلى ضلع مثلث أو إلى اسمه أو إلى طوله. ولعل هذا الغموض يعكس اختيارنا وليس عدم معرفتنا. هدفنا هو الوضوح ، وبالتأكيد فكل ما يدعم الدقة والإحكام في المادة العلمية المقدمة سيتم الإشارة إليه ضمن الوقت والمساحة الملائمين لمناقشاتنا.

والآن نستعرض الرموز التي سنستخدمها للدلالة على عناصر المثلث .

أضلاع المثلث : a, b, c .

زوايا المثلث : α, β, γ .

رؤوس المثلث : A, B, C .

ارتفاعات المثلث : h_a, h_b, h_c .

مساقط ارتفاعات المثلث على أضلاعه : H_a, H_b, H_c .

نقطة تقاطع الارتفاعات في المثلث : H .

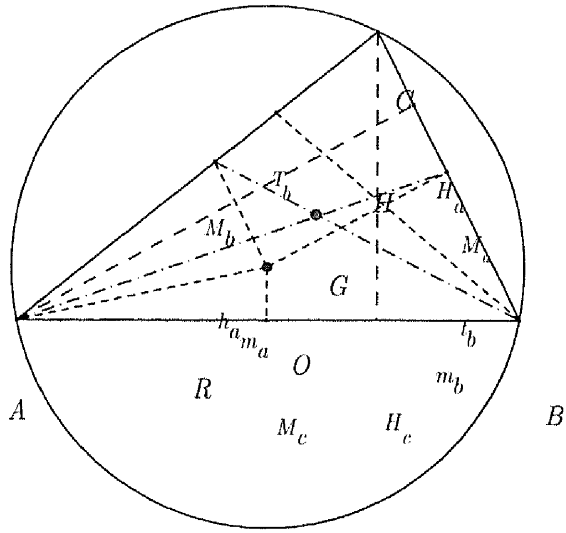
متوسطات المثلث : m_a, m_b, m_c .

نقاط المنتصف لأضلاع المثلث : M_a, M_b, M_c .

نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث : G .

منصفات زوايا المثلث : t_a, t_b, t_c .

نقاط تقاطع منصفات الزوايا مع أضلاع المثلث : T_a, T_b, T_c .



شكل $9-1$

مركز الدائرة الداخلية للمثلث (نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث) : I .

نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث : r .

مركز الدائرة المحيطية بالمثلث (نقطة تقاطع الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث) : O .

نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث : R .

نصف مجموع أطوال أضلاع المثلث $\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)$: s .

لاحظ أننا استخدمنا الحروف الصغيرة في العموم للتعبير عن قياس الطول، والحروف الكبيرة تمثل النقاط ، ويستثنى من ذلك استخدام الحرف الكبير R للتعبير عن طول نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ، وذلك اتباعاً للمألوف في هذا المقام.

الكثيرون يساورهم القلق من دراسة الهندسة بسبب هذه القائمة الطويلة من الرموز والعلاقات ، ولكنك بالفعل تعرف الكثير من العلاقات الخاصة بالمثلث (مثل

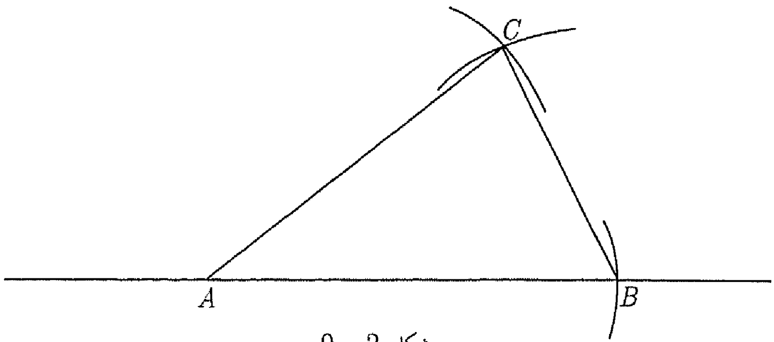
مجموع زوايا المثلث الداخلية تساوي $180°$)، وأخرى نتوقع أنك لا تعرفها، وفي سبيلك لتعلمها (مثل نظرية $13-7$ والتي تتحدث عن العلاقة بين مقلوب طول نصف قطر الدائرة الداخلية يساوي مجموع مقلوبات أطوال ارتفاعات المثلث، $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$) . بالطبع، سنستخدم كل ما نحتاج إليه من العلاقات في إنشاءاتنا، وسنقدم لتلك العلاقات براهين موجزة إذا اقتضى الأمر، وعليك أن تسعى وراء هذه البراهين لاستكمالها من خلال خبراتك أو البحث عنها في المراجع الأكثر شمولاً، وعندها قد تجد بعض العلاقات الجديدة عليك.

سنعرض في هذا الجزء من الكتاب إنشاءات المثلث في مستويين، الأول منها، نفترض فيه وجود مثلث في مكان ما، وقام أحد الأشخاص بتسليم بعض أجزائه إلينا، وعندها تصبح وظيفتنا إعادة إنشائه ليكون مثلثنا الأصلي. وفي هذا المستوى سنفترض أن الحل موجود ويكون دورنا إيجاده. وفي هذه الحالة، عادة ما تكون طريقتنا هي محاولة إيجاد سلسلة من الخطوات والعلاقات المناسبة التي من شأنها إعادة إنشاء المثلث.

أما في المستوى الثاني، فليس من الضروري أن نفترض وجود الحل، وسيكون علينا دراسة المعطيات التي لدينا في ضوء احتمالية وجوده، وإذا كان الأمر كذلك، فإننا يجب أن نحدد العلاقات بين المعلومات المعطاة وطبيعة وعدد الحلول الممكنة. وسنحاول توضيح الطريقتين أو النهجين في حل تمرين أو مشكلة مألوفة هي إنشاء مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة a, b, c .

فبالعمل من خلال المستوى الأول، فإذا فرضنا أنه بالفعل يملك أحدهم ΔABC ، وأعطانا فقط أطوال أضلاعه الثلاثة a, b, c ، فإننا وبسرعة سنعيد إنشاء هذا المثلث كالتالي : فعلى أي خط مستقيم سنحدد نقطة لتكن الرأس A ، وبرسم القوس (A, c) يقطع المستقيم في النقطة B ، إذن $AB=c$ (الشكل $2-9$)، ثم

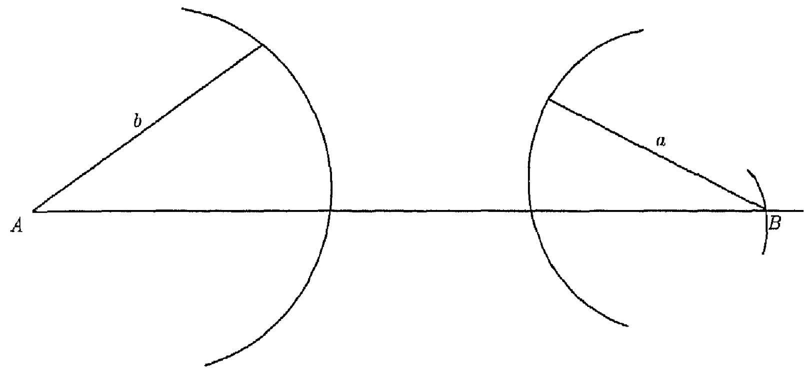
نرسم القوسين $(A,b),(B,a)$ ليتقاطعا في النقطة C ، ثم نرسم كلاً من $\overline{AC},\overline{BC}$ ، فنحصل على المثلث المطلوب ΔABC .



شكل $2-9$

أما عند العمل من خلال المستوى الثاني لهذه المشكلة فلن نفرض أن الحل موجود ولكن كما يقولون " دعونا نفحص الحصان الهدية من أسنانه "، فعلى سبيل المثال، إذا كانت الأطوال المعطاة هي $2,3,6$ فحتماً لن يأخذ ذلك منك كثيراً لتصل إلى عدم إمكانية رسم مثلث باستخدام هذه الأطوال. وأي محاولة لتنفيذ مثل الخطوات السابقة ستثبت لك استحالة تقاطع القوسين $(A,b),(B,a)$ ، وبالتالي ليس لدينا الرأس الثالثة C (الشكل $3-9$)، وبالتالي يقودنا ذلك للشرط الأساسي الذي يقول إن أي مجموعة من ثلاثة أطوال تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث إذا تحقق الشرط : مجموع أي طولين منهما أكبر من طول الضلع الثالث، وهذا ما يطلق عليه متباينة المثلث triangle inequality، والتي إذا لم تتحقق فلن يكون لدينا حل (لا يوجد لدينا مثلث)، وإذا تحقق هذا الشرط فإنه باستطاعتنا إنشاء مثلث، وفي واقع الأمر، القوسان $(A,b),(B,a)$ يتقاطعان في

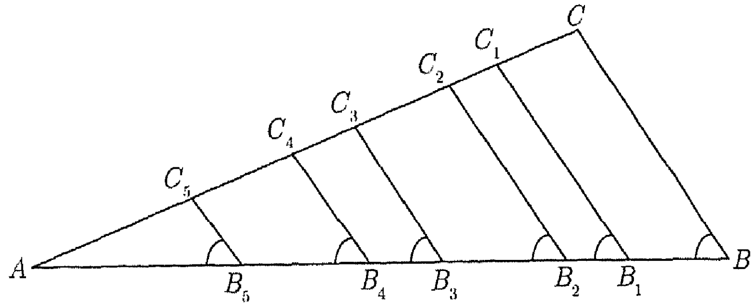
نقطتين C, C' ، إحداهما فوق والأخرى تحت $\overleftrightarrow{AB}$ ، ولذا سنحصل على مثلثين متطابقين $\Delta ABC, \Delta ABC'$ ، ولذا لدينا حل واحد لهذه المشكلة (ماذا يحدث عندما : $a + b = c$ ؟).



شكل $3 - 9$

مناقشة إمكانية وجود حل ، وعدد الحلول وعلاقتها بالمعلومات المعطاة لنا يمكن أن تقودنا إلى موضوعات رياضية أكثر عمقاً وتشويقاً ، وسندخل معا في هذه المناقشة في أوراقنا القادمة ، ونحن ننصح بمتابعة مثل هذه الأفكار قدر الإمكان. وهناك صعوبة أخرى قد تنشأ على المستويين الخاصين بالإنشاءات ، فعلى سبيل المثال ، إذا أعطينا قياسات زوايا المثلث الثلاث α, β, γ ، وإذا كانت هذه القياسات من مثلث مرسوم بالفعل ، ومع معرفتنا بأن مجموع قياسات زوايا المثلث يجب أن يكون قياس زاوية مستقيمة ، والذي يتطلب أن تكون قياس واحدة من الزوايا الثلاث تتكامل مع مجموع قياسي الزاويتين الباقيتين. لذا ؛ فمعرفة قياس أي زاويتين في مثلث تكفي لمعرفة قياس الزاوية الثالثة. وتسمى مجموعة المعلومات التي لا نحتاج أن تُعطى لنا لأننا نستطيع إيجادها بأنفسنا من المعلومات الباقية باسم مجموعة الفائض redundant set. وفي حالتنا

تلك، أعطينا في الأساس بعض المعلومات عن أي زاويتين من زوايا المثلث، لنفرض أنهما α, β ، واللتين (فعلياً) أتيا من ΔABC ، ولكن يمكن كذلك أن يأتيا من عدد غير منته من المثلثات المتشابهة $\Delta AB_1C_1, \Delta AB_2C_2, \Delta AB_3C_3, \dots$ (الشكل $4-9$).



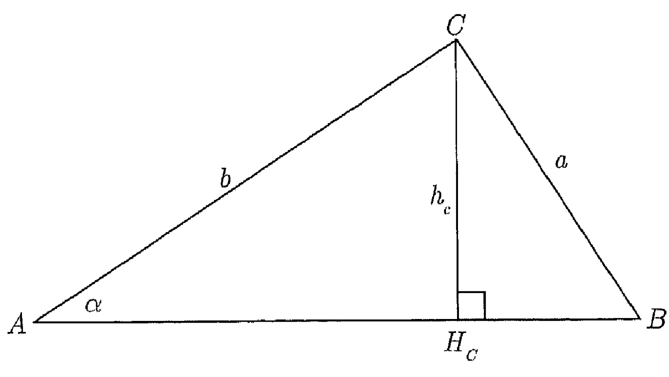
شكل $4-9$

وعلى الجانب الآخر، إذا بدأنا بأي ثلاث زوايا $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ، فمن الممكن ألا نجد مثلثاً زواياه هي $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ مالم يكن مجموع قياساتها هو قياس زاوية مستقيمة. ينبغي أن يكون واضحاً أنه من أجل إنشاء أو إعادة إنشاء أي مثلث معين، يجب أن نملك ثلاثة معطيات مستقلة حول المثلث، وأي ارتباط بين هذه المعطيات قد يصنع منها مجموعة فائض، وبالتالي لا نستطيع تعيين المثلث.

لاحظ أن المجموعة $\{a, b, c\}$ مستقلة لأن اختيار a, b لا يعني تعيين c. بالطبع نحن ملزمون بمتباينة المثلث والتي يمكن صياغتها على الصورة $a - b < c < a + b$ (هل تستطيع أن تثبت كيف استنتجنا المتباينة الثانية من المتباينة الأولى ؟). أما المجموعة $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ فهي مجموعة فائض مألوفة.

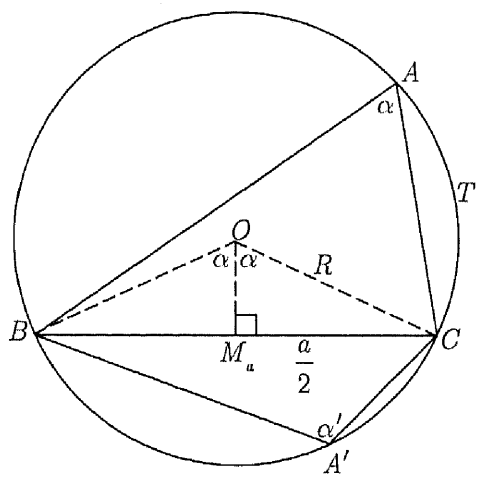
والآن، سوف نعير انتباهنا إلى اثنتين من المجموعات الفائضة غير المألوفة. لأن المثلث القائم الزاوية يتم تعيينه عندما نعرف طول وتره وإحدى زاويتيه الحادتين، فهذا يعني أن المجموعة $\{\alpha, b, h_c\}$ مجموعة فائض. من الشكل $5-9$ ، ينبغي أن يكون واضحاً أنه يمكننا أن ننشئ المثلث القائم ACH_C من أي عنصرين من عناصر المجموعة $\{\alpha, b, h_c\}$. فالرأس B يمكننا أن نأخذها في أي مكان على $\overleftrightarrow{AH_C}$ ، ولذا فبالتأكيد لا يمكننا تحديد ΔABC على وجه الخصوص. وفي المثلث القائم لدينا أيضاً $h_c = b\sin\alpha$ ؛ لذا المجموعة $\{\alpha, b, h_c\}$ مجموعة فائض، أي إذا أعطينا $\{\alpha, b\}$ فإننا لا نحتاج أن تكون ضمن معطياتنا h_c لأنه يمكننا الحصول عليها بأنفسنا.

ويكون لدينا وضع مماثل إذا كانت معطياتنا $\{\alpha, \beta, h_c\}$ والتي هي الأخرى مجموعة فائض (اعتبر المثلث القائم BCH_C) لا نستطيع بها تحديد مثلث وحيد ABC.



شكل $5-9$

مجموعة فائض أخرى أقل وضوحاً هي $\{a, \alpha, R\}$ ، ولنفرض – كما في الشكل 6 – 9 – أننا رسمنا الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، وأن نصفي قطر هذه الدائرة هما $\overline{OB}, \overline{OC}$ ، وأن $\overline{OM_a}$ ارتفاع المثلث المتطابق الضلعين OBC ، ومن علاقة الزوايا المحيطية والمركزية ، فإنه إذا كانت $\angle\alpha$ حادة ، فإن $m\angle BOC = 2m\angle\alpha$ ، أما إذا كانت $\angle\alpha$ منفرجة ؛ فإن $m\angle BOC$ تساوي ضعف قياس $\angle\alpha'$ ، ولكن في $\triangle OCM_a$ القائم نحصل على $\frac{a}{2} = R\sin\alpha$ ، وبالتالي في كلتا الحالتين $a = 2R\sin\alpha$ ، ومن خلال العلاقة السابقة يتضح بسهولة أن حصولنا على أي عنصرين من عناصر المجموعة $\{a, \alpha, R\}$ يجعلنا نحصل على العنصر الثالث من المجموعة ، أي أن المجموعة $\{a, \alpha, R\}$ تعتبر مجموعة فائض.



شكل 6 – 9

وفيما يلي نقدم قائمة منهجية وشاملة لجميع المجموعات ذات ثلاث عناصر مستقلة في المثلث والتي قد تحدد مثلثاً والبالغ عددها 179 مجموعة، وبتغيير اختيار العناصر الواردة يمكننا الحصول على قائمة مجموعات أخرى بطرق مختلفة، وبالتالي فالمجموعة رقم 2 في القائمة التالية $\{a, b, \alpha\}$ والتي يتم تفسيرها لفظيا على الصورة " ضلعان وزاوية تقابل أحدهما " يمكن أن نقدمها باختيارات أخرى سواء أضلاع أو زوايا في نفس المثلث طالما نحقق نفس المفهوم اللفظي السابق وذلك مثل : $\{a, b, \beta\}$ ، $\{a, c, \alpha\}$ ، $\{a, b, \gamma\}$ ، $\{a, b, \beta\}$ أو $\{a, b, \gamma\}$ ، ولكنك دائما عند إنشائك أو تعاملك مع مشكلة من هذا النوع، سوف تجدها دائما ضمن القائمة التالية وذلك بكتابة العناصر المعطاة بالترتيب الذي استخدمناه في كل مجموعة وهو كالتالي، الأضلاع، الزوايا، الارتفاعات، المتوسطات، منصفات الزوايا، نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث، نصف قطر الدائرة الداخلية ونصف المحيط.

1. $\{a, b, c\}$
2. $\{a, b, \beta\}$
3. $\{a, b, \gamma\}$
4. $\{a, \alpha, \beta\}$
5. $\{a, b, h_a\}$
6. $\{a, b, h_c\}$
7. $\{a, \alpha, h_a\}$
8. $\{a, \alpha, h_b\}$
9. $\{a, \beta, h_a\}$

17. $\{a, b, m_a\}$
18. $\{a, b, m_c\}$
19. $\{a, \alpha, m_a\}$
20. $\{a, \alpha, m_b\}$
21. $\{a, \beta, m_a\}$
22. $\{a, \beta, m_b\}$
23. $\{a, \beta, m_c\}$
24. $\{\alpha, \beta, m_a\}$
25. $\{a, h_a, m_a\}$

33. $\{\alpha, h_b, m_b\}$
34. $\{\alpha, h_b, m_c\}$
35. $\{h_a, h_b, m_a\}$
36. $\{h_a, h_b, m_c\}$
37. $\{a, m_a, m_b\}$
38. $\{a, m_a, m_c\}$
39. $\{\alpha, m_a, m_b\}$
40. $\{\alpha, m_b, m_c\}$
41. $\{h_a, m_a, m_b\}$

49. $\{a, \beta, t_b\}$
50. $\{a, \beta, t_c\}$
51. $\{\alpha, \beta, t_a\}$
52. $\{a, h_a, t_a\}$
53. $\{a, h_a, t_b\}$
54. $\{a, h_b, t_a\}$
55. $\{a, h_b, t_b\}$
56. $\{a, h_b, t_c\}$
57. $\{\alpha, h_a, t_a\}$

10. $\{a, \beta, h_b\}$
11. $\{\alpha, \beta, h_a\}$
12. $\{a, h_a, h_b\}$
13. $\{a, h_b, h_c\}$
14. $\{\alpha, h_a, h_b\}$
15. $\{\alpha, h_a, h_c\}$
16. $\{h_a, h_b, h_c\}$

26. $\{a, h_a, m_b\}$
27. $\{a, h_b, m_a\}$
28. $\{a, h_b, m_b\}$
29. $\{a, h_b, m_c\}$
30. $\{\alpha, h_a, m_a\}$
31. $\{\alpha, h_a, m_b\}$
32. $\{\alpha, h_b, m_a\}$

42. $\{h_a, m_b, m_c\}$
43. $\{m_a, m_b, m_c\}$
44. $\{a, b, t_a\}$
45. $\{a, b, t_c\}$
46. $\{a, \alpha, t_a\}$
47. $\{a, \alpha, t_b\}$
48. $\{a, \beta, t_a\}$

58. $\{\alpha, h_a, t_b\}$
59. $\{\alpha, h_b, t_a\}$
60. $\{\alpha, h_b, t_b\}$
61. $\{\alpha, h_b, t_c\}$
62. $\{h_a, h_b, t_a\}$
63. $\{h_a, h_b, t_c\}$
64. $\{a, m_a, t_a\}$

65. $\{a, m_a, t_b\}$
66. $\{a, m_b, t_a\}$
67. $\{a, m_b, t_b\}$
68. $\{a, m_b, t_c\}$
69. $\{\alpha, m_a, t_a\}$
70. $\{\alpha, m_a, t_b\}$
71. $\{\alpha, m_b, t_a\}$
72. $\{\alpha, m_b, t_b\}$
73. $\{\alpha, m_b, t_c\}$
74. $\{h_a, m_a, t_a\}$
75. $\{h_a, m_a, t_b\}$
76. $\{h_a, m_b, t_a\}$
77. $\{h_a, m_b, t_b\}$

81. $\{a, t_a, t_b\}$
82. $\{a, t_b, t_c\}$
83. $\{\alpha, t_a, t_b\}$
84. $\{\alpha, t_b, t_c\}$
85. $\{h_a, t_a, t_b\}$
86. $\{h_a, t_b, t_c\}$
87. $\{m_a, t_a, t_b\}$
88. $\{m_a, t_a, t_c\}$
89. $\{t_a, t_b, t_c\}$
90. $\{a, b, R\}$
91. $\{a, \beta, R\}$
92. $\{\alpha, \beta, R\}$
93. $\{a, h_a, R\}$

97. $\{h_a, h_b, R\}$
98. $\{a, m_a, R\}$
99. $\{a, m_b, R\}$
100. $\{\alpha, m_a, R\}$
101. $\{\alpha, m_b, R\}$
102. $\{h_a, m_a, R\}$
103. $\{h_a, m_b, R\}$
104. $\{m_a, m_b, R\}$
105. $\{a, t_a, R\}$
106. $\{a, t_b, R\}$
107. $\{\alpha, t_a, R\}$
108. $\{\alpha, t_b, R\}$
109. $\{h_a, t_a, R\}$

113. $\{t_a, t_b, R\}$
114. $\{a, b, r\}$
115. $\{a, \alpha, r\}$
116. $\{a, \beta, r\}$
117. $\{\alpha, \beta, r\}$
118. $\{a, h_a, r\}$
119. $\{a, h_b, r\}$
120. $\{\alpha, h_a, r\}$
121. $\{\alpha, h_b, r\}$
122. $\{h_a, h_b, r\}$
123. $\{a, m_a, r\}$
124. $\{a, m_b, r\}$
125. $\{\alpha, m_a, r\}$

78. $\{h_a, m_b, t_c\}$

79. $\{m_a, m_b, t_a\}$

80. $\{m_a, m_b, t_c\}$

94. $\{a, h_b, R\}$

95. $\{\alpha, h_a, R\}$

96. $\{\alpha, h_b, R\}$

110. $\{h_a, t_b, R\}$

111. $\{m_a, t_a, R\}$

112. $\{m_a, t_b, R\}$

126. $\{\alpha, m_b, r\}$

127. $\{h_a, m_a, r\}$

128. $\{h_a, m_b, r\}$

129. $\{m_a, m_b, r\}$

130. $\{a, t_a, r\}$

131. $\{a, t_b, r\}$

132. $\{\alpha, t_a, r\}$

133. $\{\alpha, t_b, r\}$

134. $\{h_a, t_a, r\}$

135. $\{h_a, t_b, r\}$

136. $\{m_a, t_a, r\}$

137. $\{m_a, t_b, r\}$

138. $\{t_a, t_b, r\}$

139. $\{a, R, r\}$

140. $\{\alpha, R, r\}$

141. $\{h_a, R, r\}$

142. $\{m_a, R, r\}$

143. $\{t_a, R, r\}$

144. $\{a, b, s\}$

145. $\{a, \alpha, s\}$

146. $\{a, \beta, s\}$

147. $\{\alpha, \beta, s\}$

148. $\{a, h_a, s\}$

149. $\{a, h_b, s\}$

150. $\{\alpha, h_a, s\}$

151. $\{\alpha, h_b, s\}$

152. $\{h_a, h_b, s\}$

153. $\{a, m_a, s\}$

154. $\{a, m_b, s\}$

155. $\{\alpha, m_a, s\}$

156. $\{\alpha, m_b, s\}$

157. $\{h_a, m_a, s\}$

158. $\{h_a, m_b, s\}$

159. $\{m_a, m_b, s\}$

160. $\{a, t_a, s\}$

161. $\{a, t_b, s\}$

162. $\{\alpha, t_a, s\}$

163. $\{\alpha, t_b, s\}$

164. $\{h_a, t_a, s\}$

165. $\{h_a, t_b, s\}$

166. $\{m_a, t_a, s\}$

167. $\{m_a, t_b, s\}$

168. $\{t_a, t_b, s\}$

169. $\{a, R, s\}$

170. $\{\alpha, R, s\}$

171. $\{h_a, R, s\}$

172. $\{m_a, R, s\}$

173. $\{t_a, R, s\}$

174. $\{a, r, s\}$

175. $\{\alpha, r, s\}$

176. $\{h_a, r, s\}$

177. $\{m_a, r, s\}$

178. $\{t_a, r, s\}$

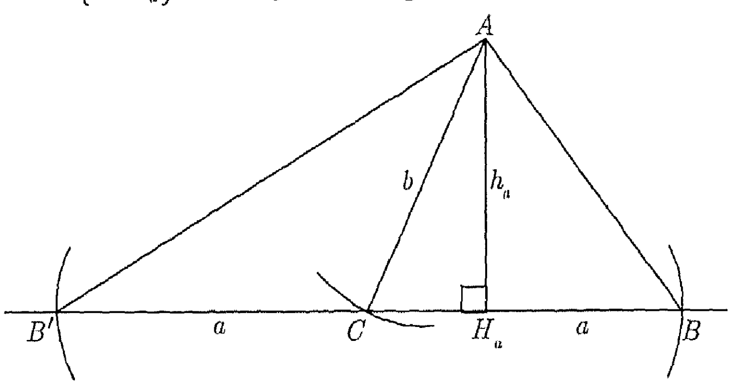
179. $\{R, r, s\}$

بواسطة القائمة السابقة، نستطيع الحصول على 179 مسألة إنشاءات، وبالطبع أنت مدعو للغوص في تفاصيلها، وسنقوم بتنفيذ الكثير من هذه الإنشاءات في الجزء الباقي من هذا الفصل وإثباتها بطرق وآليات مفيدة تسهم بلا شك في تطوير المفاهيم والمعلومات الهندسية، وبخاصة غير الشائعة منها. وسوف نناقش بشكل كامل في الجزء الأول من هذه الإنشاءات، الإمكانية وعدد الحلول حسب الشروط المختلفة، وفي باقي المسائل سنترك للقارئ هذا العمل الشيق (والأكثر صعوبة).

بعض الإنشاءات المختارة للمثلث

الإنشاء رقم 5 $\{a, b, h_a\}$

لنأخذ النقطة H_a على أي خط مستقيم، ونرسم منها العمود H_aA الذي طوله h_a (انظر الشكل 7 − 9)، وليقطع القوس (A, b) هذه الخط الأساسي في النقطة C، والقوس (C, a) هذه الخط الأساسي في النقطتين B, B'. إذن لدينا الحلان $\Delta ABC, \Delta AB'C$، وكل منهما له نفس المعطيات $\{a, b, h_a\}$.



شكل 7 − 9

المناقشة

لأن القوس (A,b) يجب أن يقطع الخط الأساسي لنحصل على النقطة C ، يكون الشرط اللازم لوجود حل هو $b \geq h_a$. لأن القوس سيقطع الخط مرة أخرى في النقطة C' (على يمين النقطة H_a)، وكذلك سنحصل أيضاً على زوج آخر من الحلول ، ولكن هذا الزوج هو صورة بالانعكاس للحلول التي لدينا بالفعل. وفي احتمال آخر إذا أخذنا العمود عند النقطة H_a فوق وأسفل الخط الأساسي ، فإننا مرة أخرى نحصل على صورة بالانعكاس للحلول السابقة.

وفي عملنا اللاحق لن نناقش الحلول المتماثلة أو التي نحصل عليها بالانعكاس ، والتي لا تسهم بأي جديد.

إذا كان $h_a = b$ فإنه سيكون لدينا تقاطع واحدة بين القوس (A,b) والخط الأساسي عند النقطة H_a نفسها والتي هي أيضا نقطة التماس لهذا القوس ، وفي هذه الحالة يكون المثلثان ACB, ACB' قائمين متطابقين ، أي أن لدينا حلاً واحداً في حالة $h_a = b$. وقد رأينا أن لدينا حلين عندما $b > h_a$ بصرف النظر عن اختيارنا لمقدار طول a. إذن في النهاية ؛ الشرط $b \geq h_a$ شرط لازم وكاف لأي حل لهذه المسألة ، فحالة التساوي تقودنا لحل واحد وحالة عدم التساوي تقودنا لحلين اثنين .●

الإنشاء رقم 7 $\{a, \alpha, h_a\}$

لحل هذه المسألة ، من الأفضل استخدام تقاطع المحال الهندسية ، (انظر الشكل 8 − 9). فعلى أي خط مستقيم ، ننشئ $BC = a$. إذن ، أحد المحال الهندسية للرأس A هو الخط المستقيم L_1 الذي يوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ويبعد عنه مسافة قدرها h_a ، وبالعمل على محل هندسي آخر للرأس A ، وهو جزء الدائرة التي تمر بالنقطتين B, C ونقطة

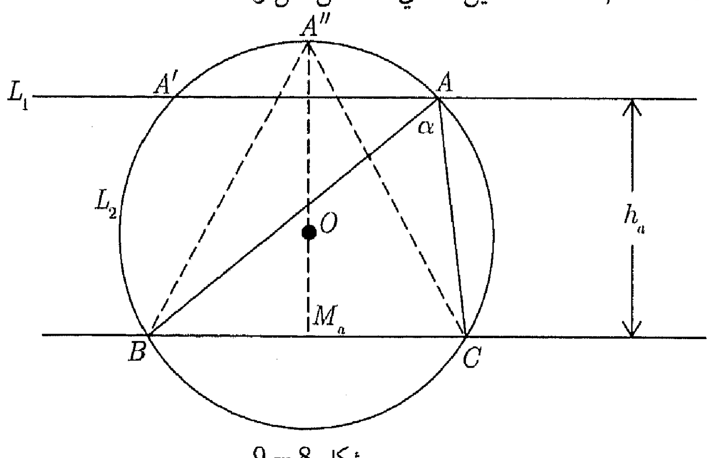
ثالثة A'' مقابلة لـ $\overleftrightarrow{BC}$ من جهة L_1 بحيث يكون $m\angle BA''C = \alpha$. باعتبار نقطتي تقاطع هذه الدائرة مع L_1 في A, A' ، نجد أن كلاً $\Delta ABC, \Delta A'BC$ حل ممكن.

المناقشة

في هذه المسألة ، سنحصل على الحلول إذا وفقط إذا تقاطع المحلان الهندسيان ، وهذا التقاطع سيحدث إذا كانت h_a "ليست كبيرة جداً". لاحظ أيضاً المثلث " الأطول " $\Delta A''BC$ ، وفي المثلث القائم

$\Delta A''BM_a$ والذي فيه $m\angle BA''M_a = \dfrac{1}{2}\alpha$ ، $BM = \dfrac{1}{2}a$.

المشكلة الأصلية لها حل إذا وفقط إذا تحقق الشرط $h_a \le A''M_a$ ، والذي يتحول من العلاقات في المثلث القائم إلى $h_a \le \dfrac{1}{2}a \cot \dfrac{1}{2}\alpha$ ، وتأتي حالة التساوي عندما L_1 يمس الدائرة عند النقطة A'' ، ويكون الحل الوحيد هو المثلث المتطابق الضلعين $A''BC$ ، وفي حالة عدم التساوي نحصل على المثلثين المتطابقين $\Delta ABC, \Delta A'BC$ الذين هما في الأساس حل واحد.

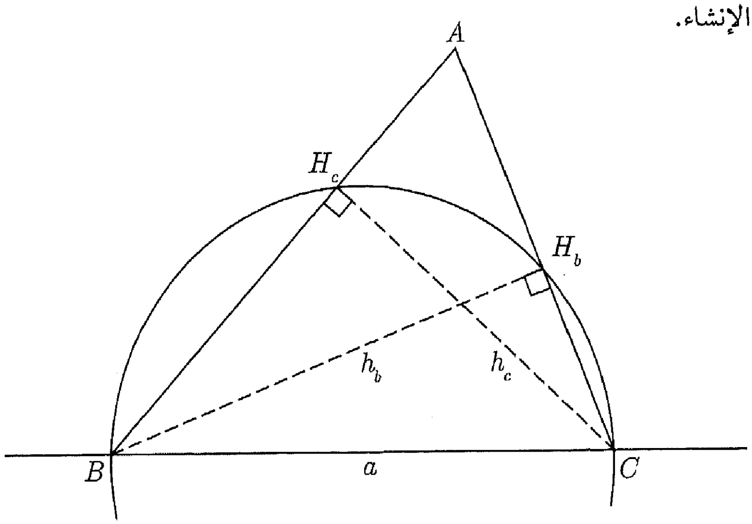


شكل 8 – 9

الإنشاء رقم 13 $\{a, h_b, h_c\}$

على أي خط مستقيم أنشئ $BC = a$ ، ونصف دائرة قطرها $\overline{BC}$ (انظر الشكل 9 − 9). إذن نصف الدائرة محل هندسي لكل من H_b, H_c لأن كلاً من $\angle BH_bC, \angle BH_cC$ قائمة. والآن، لنرسم القوس (B, h_b) ليقطع نصف الدائرة في H_b ، ونرسم القوس (C, h_c) ليقطع نصف الدائرة في H_c ، وأخيراً نرسم $\overleftrightarrow{BH_c}, \overleftrightarrow{CH_b}$ ليتقاطعا في النقطة A ليعطينا ذلك الحل ΔABC .

سنترك المناقشة والتوضيح لك أيها القارئ مع إرشاد بأنك يجب أن تفحص نسبية الأطوال a, h_a, h_c والتي تعين نقاط التقاطع للأقواس المختلفة التي تدخل في الإنشاء.



شكل 9 − 9

الإنشاء رقم 16 في $\{h_a, h_b, h_c\}$

الحل الأول:

لأن مساحة ΔABC تساوي $\frac{1}{2}ah_a$ وتساوي أيضاً $\frac{1}{2}bh_b$ ، $\frac{1}{2}ch_c$. إذن ،

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

ومن ذلك نستطيع كتابة المعادلات :

$$a : \frac{1}{h_a} = b : \frac{1}{h_b} = c : \frac{1}{h_c}$$

وتخبرنا المعادلات السابقة أن أطوال أضلاع المثلث تتناسب عكسيا مع ارتفاعات المثلث المناظرة لها . وبالعكس يمكننا الوصول للمعادلات :

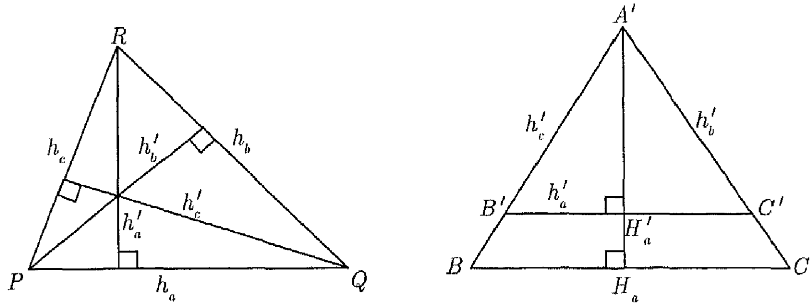
$$h_a : \frac{1}{a} = h_b : \frac{1}{b} = h_c : \frac{1}{c}$$

إذا رسمنا مثلثاً جديداً وليكن ΔPQR والذي أطوال أضلاعه h_a, h_b, h_c (انظر الشكل $9 - 10$) وأطوال ارتفاعاته h'_a, h'_b, h'_c ، والتي هي أيضاً تتناسب عكسياً مع أطوال أضلاع المثلث h_a, h_b, h_c :

$$h_a : \frac{1}{h'_a} = h_b : \frac{1}{h'_b} = h_c : \frac{1}{h'_c}$$

ولكننا يمكن أن نرى أن أطوال هذه الارتفاعات الجديدة سوف تتناسب مباشرة مع أطوال أضلاع المثلث الأصلي :

$$a : h'_a = b : h'_b = c : h'_c$$



شكل 10 – 9

إذن المثلث الجديد الذي أطوال أضلاعه h_a', h_b', h_c' يشابه المثلث المطلوب ABC. وعليه تكون خطوات الإنشاء كالتالي :

(1) أنشئ ΔPQR والذي أطوال أضلاعه هي الارتفاعات المعطاة h_a, h_b, h_c.

(2) أوجد أطوال الارتفاعات h_a', h_b', h_c' للمثلث PQR.

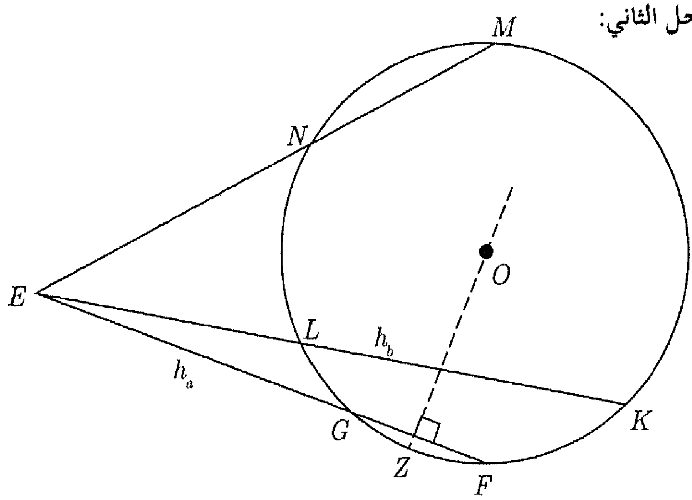
(3) أنشئ $\Delta A'B'C'$ والذي أطوال أضلاعه هي الارتفاعات التي أتينا بها تواً. ($\Delta A'B'C'$ يشابه المثلث المطلوب ABC). (انظر الشكل 10 – 9).

(4) أنشئ أي ارتفاع للمثلث $\Delta A'B'C'$ وليكن $\overline{A'H_a'}$ ثم أنشئ عليه $\overline{A'H_a}$ والذي يطابق طول الارتفاع المعطى h_a.

(5) من النقطة H_a نرسم عموداً إلى $A'H_a$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{A'C'}$ في النقطتين B, C.

إذن، $\Delta A'BC$ هو المثلث المطلوب. ●

الحل الثاني:



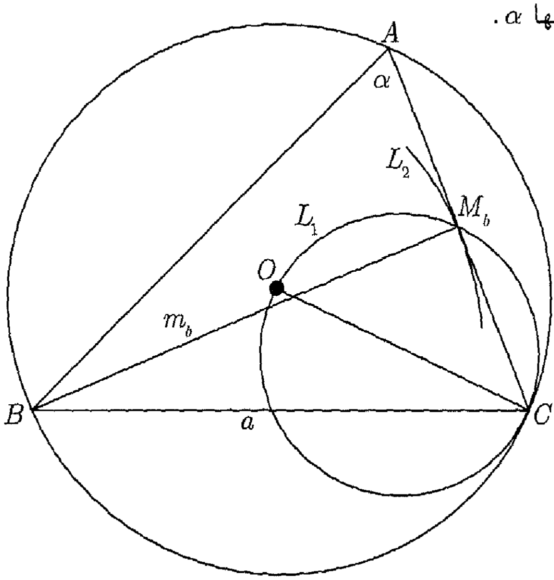
شكل 11 − 9

إذا رسمنا من النقطة E التي تقع خارج الدائرة O ، القواطع الموضحة بالشكل 11 − 9 ، إذن : $EF \cdot EG = EK \cdot EL = EM \cdot EN$ ، وكل من هذه المقادير يساوي أياً من المقادير المتساوية $ah_a = bh_b = ch_c$ ، حيث اعتبرنا $EF = h_a, EK = h_b, EM = h_c$ ، و $EG = a', EL = b', EN = c'$ كما في الشكل 11 − 9. إذن لدينا $a'h_a = b'h_b = c'h_c$ ثم بالقسمة نحصل على $a : a' = b : b' = c : c'$. وعليه يكون المثلث الذي أطواله a', b', c' مشابهاً للمثلث المطلوب (المثلث الحل) ABC. ثم نكمل الإنشاء بعمل المثلث $A'B'C'$ والذي أضلاعه تطابق كلاً من $\overline{EG}, \overline{EL}, \overline{EN}$ ، ثم نكمل كما في الحل الأول.

في كلتا الحالتين $\Delta A'B'C'$ سوف يشابه المثلث المطلوب (المثلث الحل) ABC. ●

الإنشاء رقم 20 $\{a, \alpha, m_b\}$

على أي خط مستقيم أنشئ $BC = a$ ، ثم أنشئ قوساً دائرياً BAC يحتوي زاوية قياسها α .

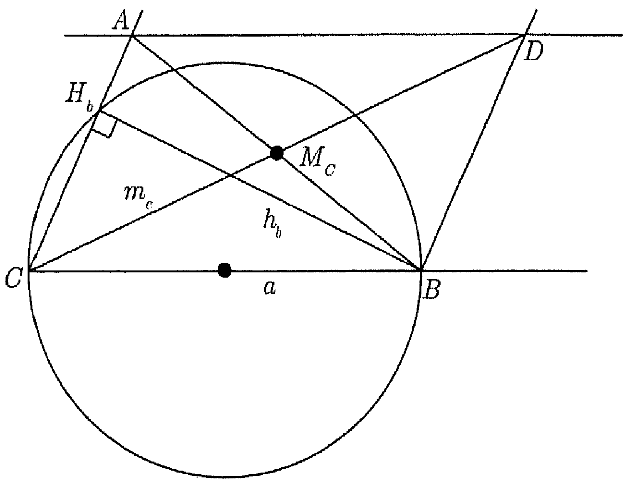


شكل 12 − 9

بالطبع ، يكون هذا القوس هو المحل الهندسي للرأس A ، وهو في ذات الوقت جزء من الدائرة O المحيطة بالمثلث ABC. وبعد ذلك، أنشئ الدائرة L_1 التي قطرها $\overline{OC}$ ، والتي هي أيضاً المحل الهندسي لجميع نقاط المنتصف لكل وتر للدائرة الأولى مرسوم من النقطة C ، وبالتالي هي المحل الهندسي للنقطة M_b ، ولأن المسافة من النقطة B إلى النقطة M_b هي m_b ، فإن هناك محلاً هندسياً آخر للنقطة M_b هو L_2 ، وهو الدائرة (B, m_b) الموضح جزء منها في الشكل 12 − 9. إذن؛ النقطة M_b هي نقطة تقاطع هذين المحلين الهندسيين. ثم نرسم $\overleftrightarrow{CM_b}$ ليلاقي الدائرة الأولى في النقطة A . إذن المثلث المطلوب (المثلث الحل) هو ΔABC .

الإنشاء رقم 29 $\{a, h_b, m_c\}$.

لنفرض أن المثلث قد تم إنشاؤه بالفعل، فإذا مددنا $\overline{CM_C}$ بقدر طوله إلى D ، فإن الشكل $ACBD$ متوازي أضلاع (لأن القطرين ينصف كل منهما الآخر (انظر الشكل $13-9$)). الأطوال a, h_b تعين المثلث القائم الزاوية BH_bC ، والآن يكون الإنشاء كالتالي.

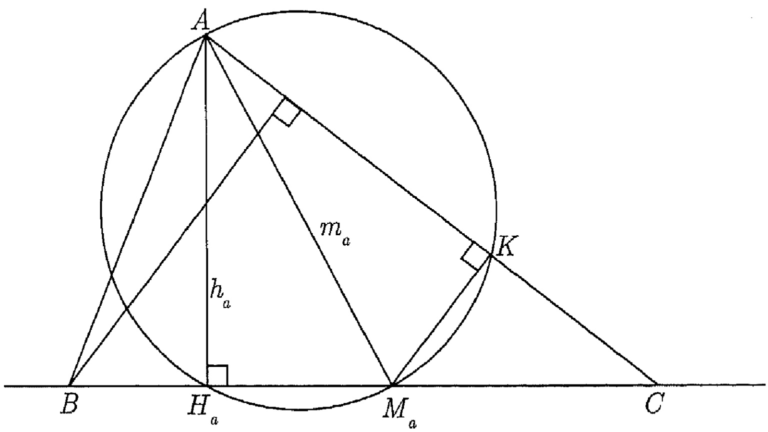


شكل $13-9$

على أي مستقيم أنشئ $CB = a$ ، ثم أنشئ نصف الدائرة التي قطرها $\overline{BC}$ (نصف الدائرة هي المحل الهندسي للنقطة H_b). القوس (B, h_b) يقطع نصف الدائرة عند النقطة H_b ، والآن لنرسم $\overleftrightarrow{CH_b}$ ، ثم نرسم $\overleftrightarrow{BD}$ يوازي $\overleftrightarrow{CH_b}$. والقوس $(C, 2m_c)$ يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ عند النقطة D ، والتي تكون الرأس الثالثة لمتوازي الأضلاع. ومن النقطة D نرسم مستقيماً يوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ويقطع $\overleftrightarrow{CH_b}$ في النقطة A ، الرأس الرابعة من متوازي الأضلاع وهي الرأس الثالثة من المثلث المطلوب هو ABC.

الإنشاء رقم 35 $\{h_a, h_b, m_a\}$.

لنفرض أن المثلث موجود بالفعل، إن المثلث ΔAM_aH_a يتحدد تماماً بالمعطيات، فالوتر هو m_a، وضلع القائمة h_a، وهذا ما يعين المثلث. لنرسم الدائرة المحيطة بهذا المثلث، ونعتبر K نقطة تقاطع هذه الدائرة مع $\overline{AC}$ (انظر الشكل 14 − 9). الزاوية M_aKA قائمة لأن الرباعي M_aKAH_a دائري. الآن، M_a منتصف $\overline{BC}$، وكل من BH_b, M_aK عمودي على $\overline{AC}$. إذن؛ $M_aK = \frac{1}{2}h_b$. نعلم أيضاً طول الوتر m_a. والآن يكون الإنشاء كالتالي.



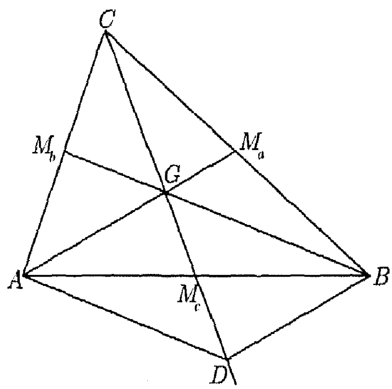
شكل 14 − 9

على أي مستقيم أنشئ $AM_a = m_a$، ثم ارسم الدائرة التي قطرها $\overline{AM_a}$، والتي هي في واقع الأمر محل هندسي لكل من النقطتين H_a, K. نقطع الدائرة بالقوس (A, h_a) لتحديد موقع النقطة H_a، ثم مع القوس $\left(M_a, \frac{1}{2}h_b\right)$ لتحديد موقع النقطة K، ثم نرسم $\overleftrightarrow{H_aM_a}, \overleftrightarrow{AK}$ ليتقاطعا في الرأس C، وأخيراً نمد $\overline{CM_a}$ بمقدار طوله

CM_a لنحصل على النقطة B ، ثم نرسم $\overline{AB}$ لنكمل المثلث المطلوب الذي هو ABC.

الإنشاء رقم 43 $\{m_a, m_b, m_c\}$.

لنفرض أن المثلث موجود بالفعل ، نمد $\overline{GM_c}$ بقدر طوله ليصل للنقطة D، ثم نرسم $\overline{AD}, \overline{DB}$ (انظر الشكل 15 − 9) فنحصل على متوازي الأضلاع $ADBG$ (لأن القطرين ينصف كل منهما الآخر)، ولكن $AG = \frac{2}{3}m_a, AD = BG = \frac{2}{3}m_b, GD = 2(GM_c) = \frac{2}{3}m_c$، إذن، أضلاع ΔADG تساوي على الترتيب ثلثي أطوال المتوسطات المعطاة. والآن يكون الإنشاء كالتالي.



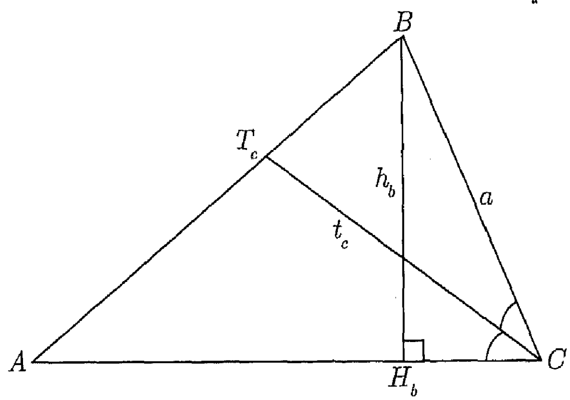
شكل 15 − 9

أنشئ قطعاً مستقيمة أطوالها تساوي ثلثي أطوال المتوسطات المعطاة، ومن هذه القطع أنشئ ΔADG ، والذي أطوال أضلاعه $AD = \frac{2}{3}m_b, DG = \frac{2}{3}m_c, GA = \frac{2}{3}m_a$ ، اعتبر منتصف $\overline{DG}$ هي النقطة M_c ، ثم مد $\overline{AM_c}$ بقدر طوله ليصل للنقطة B ، وهي رأس من رؤوس المثلث المطلوب. وأخيراً، مد $\overline{DG}$ بقدر طوله ليحدد الرأس الثالثة من المثلث المطلوب وهي C ، وعليه نصل $\overline{AC}, \overline{BC}$ ، فيظهر لنا الحل.

الإنشاء رقم 56 $\{a, h_b, t_c\}$.

لنفرض أن المثلث موجود بالفعل، إذن المثلث القائم CBH_b يمكن تعيينه لأننا نعلم وتره a وطول ضلع القائمة h_b، ولكننا أيضاً في هذا المثلث القائم نعلم $\angle BCH_b$ والتي هي أيضاً زاوية المثلث المطلوب ABC. وعليه يكون الإنشاء كالتالي.

على أي خط مستقيم، اختر النقطة H_b، ثم أقم منها عموداً بحيث $H_bB = h_b$ (انظر الشكل 16 – 9). ارسم القوس (B, a) الذي يقطع الخط الرئيسي عند النقطة C، ثم ارسم $\overline{BC}$ ونصف $\angle BCH_b$. وعلى هذا المنصف نأخذ $CT_c = t_c$. وأخيراً، تكون الرأس A نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BT_c}, \overleftrightarrow{CH_b}$. وعلى ذلك يكتمل لدينا المثلث المطلوب الذي هو ABC.



شكل 16 – 9

الإنشاء رقم 63 $\{h_a, h_b, t_c\}$.

لنفرض أن المثلث موجود بالفعل، ومن T_c نرسم $\overline{T_cY}$ على $\overline{BC}$ يقطعه في Y (انظر الشكل 17 – 9). ولأن منصف الزاوية يقسم الضلع المقابل لها إلى جزأين

يتناسبان مع ضلعي الزاوية ، فإن $\frac{AT_c}{T_cB} = \frac{b}{a}$ ، وكما عرضنا سابقاً فإن أطوال أضلاع المثلث تتناسب عكسيا مع أطوال ارتفاعات المثلث المتناظرة ، إذن $\frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b}$ ، ومن ذلك نستنتج أن $\frac{AT_c}{T_cB} = \frac{h_a}{h_b}$ ، ويمكننا من التناسب السابق أن نحصل على :

$$\frac{h_a + h_b}{h_b} = \frac{AT_c + T_cB}{T_cB} = \frac{AB}{T_cB}$$

من المثلثين القائمين BAH_a, BT_CY لدينا :

$$\frac{AB}{T_cB} = \frac{AH_a}{T_cY} = \frac{h_a}{T_cY}$$

ومن ذلك نحصل على :

$$\frac{h_a + h_b}{h_b} = \frac{h_a}{T_cY}$$

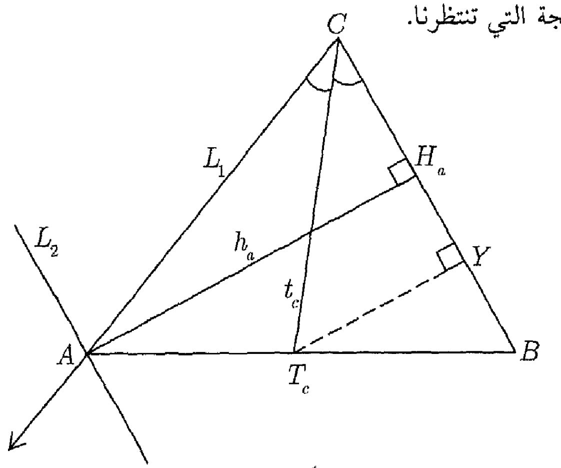
نلاحظ في التناسب الأخير أننا إذا علمنا مقدار T_cY نحصل على الإنشاء لأن بقية المقادير معطاة.

وعليه سيبدأ العمل بإيجاد القطعة المستقيمة $\overline{T_cY}$ من القيم المعطاة أصلاً في المسألة، $h_a + h_b, h_a, h_b$ ، ثم نرسم المثلث القائم الزاوية CYT_c بمعلومية وتره $CT_c = t_c$ وضلعه $\overline{T_cY}$ ، ولكن هذا المثلث القائم يحتوي على $\angle YCT_c$ ، والتي هي نصف قياس $\angle BCA$ التي هي إحدى زوايا المثلث المطلوب. وإذا أخذنا صورة $\angle YCT_c$ بالانعكاس حول $\overline{T_cC}$ ، فإن $\overleftrightarrow{CA}$ هو المحل الهندسي L_1 للرأس A ، ولكن لأن هذه الرأس أيضاً على بعد h_a من الضلع المقابل، فإن محلاً هندسياً آخر للرأس A هو L_2 ، الخط المستقيم الذي يوازي $\overleftrightarrow{CY}$ ويبعد عنه المسافة h_a. وهذان المحلان الهندسيان

يتقاطعان في النقطة A ، وفي النهاية $\overleftrightarrow{AT_c},\overleftrightarrow{CY}$ يتقاطعان في النقطة B والتي تمثل الرأس الثالثة للمثلث المطلوب ABC .

المناقشة

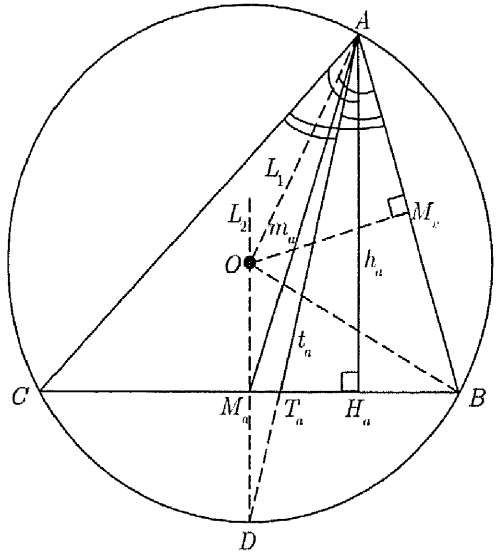
لقد حصلنا على الحل بواسطة التحليل الجبري والذي يبعد كثيراً عن دراستنا. بالطبع ، من الضروري أن نعرف العلاقات الهندسية التي قادتنا للتناسب. ولعلك تلاحظ أن الإنشاءات الأخيرة استندت على علاقات هندسية كثيرة غير مألوفة ، ولذا أنت مدعو لتوسيع وتعميق معارفك الهندسية وذلك إن كنت ستغامر بالدخول في المياه الهائجة التي تنتظرنا.



شكل 17 – 9

الإنشاء رقم 74 $\{h_a, m_a, t_a\}$.

لنفرض كالعادة أن المثلث موجود بالفعل. المثلثان القائمان AH_aT_a, AH_aM_a كلاهما يمكن تعيينه بمعرفة الوتر وأحد ضلعي القائمة ، ولنرسم كذلك الدائرة المحيطة بالمثلث المطلوب ABC بنصفي قطريها $\overline{OA},\overline{OM_aD}$ (انظر الشكل 18 – 9) ، ثم بعد ذلك ، لنثبت نظرية بسيطة مهمة ستساعدنا في عملنا هنا.



شكل 18– 9

نظرية: 9–1 منصف زاوية رأس المثلث ينصف أيضا الزاوية التي ضلعاها ارتفاع المثلث من نفس الرأس، ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث الواصل من مركزها إلى نفس الرأس.

البرهان

العمود الخارج من مركز الدائرة المحيطة O إلى $\overline{AB}$ يلاقي $\overline{AB}$ في M_c ، والتي هي منتصف $\overline{AB}$. ولأن الزاوية المركزية AOB والزاوية المحيطية ACB يشتركان في قوس واحد، فإن:

$$\gamma = \frac{1}{2} m\angle AOB = m\angle AOM_c$$

وفي المثلثين القائمين ACH_a, OAM_c لدينا :

$$m\angle CAH_a = m\angle OAM_c = \gamma$$ متممة

ولكن لأن $\overleftrightarrow{AT_a}$ ينصف $\angle BAC$ ، أي أن $m\angle BAT_a = m\angle CAT_a$ ، وبالطرح نحصل على :

$$.m\angle OAT_a = m\angle H_aAT_a$$

إذن $\overleftrightarrow{AT_a}$ لا ينصف فقط $\angle ABC$ ولكنه ينصف أيضاً $\angle H_aAO$. ●

ونفس الشكل 18 – 9 يقودنا لاستنتاج آخر مفيد نصوغه في النظرية التالية :

نظرية: 9-2 منصف زاوية رأس المثلث يلاقي العمود المنصف للضلع المقابل لهذه الزاوية في نقطة تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث.

البرهان

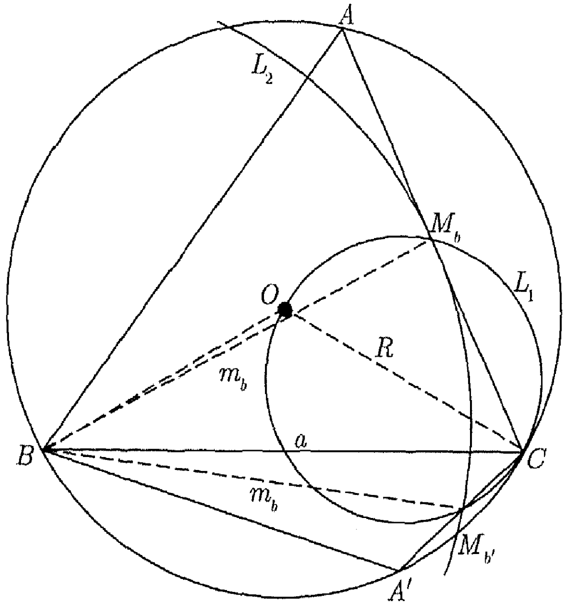
هدفنا هو إثبات أن $\overleftrightarrow{OM_a}, \overleftrightarrow{AT_a}$ يتلاقيان على الدائرة المحيطة بالمثلث عند النقطة D (انظر الشكل 18 – 9). وهذا الهدف يتحقق مباشرة، حيث إن كلاً من المستقيمين ينصف $\overset{\frown}{AB}$.

بالعودة إلى الإنشاء المطلوب، نجد أنه في ضوء هاتين النظريتين. ننشئ المثلثين القائمين H_aAT_a ، AH_aM_a ، ثم نضاعف $\angle H_aAT_a$ حول $\overleftrightarrow{AT_a}$ لنحصل على المحل الهندسي الأول L_1 ، لمركز الدائرة المحيطة O ($\overleftrightarrow{AT_a}$ ينصف $\angle H_aAO$). أما المحل الهندسي الثاني الخاص بالدائرة O ، فهو العمود L_2 على $\overleftrightarrow{H_aM_a}$ عند النقطة M_a ، وأخيراً، الدائرة (O, OA) ستلاقي $\overleftrightarrow{H_aM_a}$ عند B, C ، الرأسين المتبقيتين للمثلث المطلوب ABC. ●

الإنشاء رقم 99 $\{a, m_b, R\}$.

لننشئ المثلث المتطابق الضلعين OBC ، والمعلوم أضلاعه كالتالي : $BC = a, OB = OC = R$ (انظر الشكل 19 – 9). إذن ؛ الدائرة (O, R) هي محل

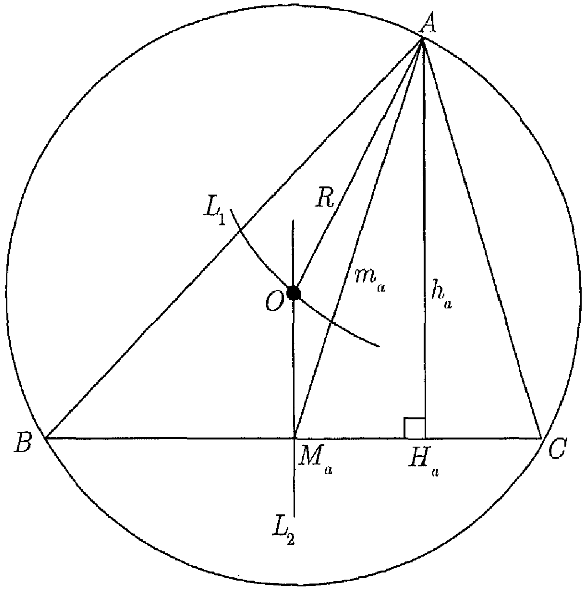
هندسي للرأس الثالثة من المثلث المطلوب ABC . ولكن لأن M_b منتصف $\overline{AC}$ ، فإن أحد المحال الهندسية للنقطة M_b هو الدائرة L_1 ، والتي قطرها $\overline{OC}$. ولأن M_b على بعد معلوم قدره m_b من الرأس B ؛ فإن محلاً هندسياً آخر سيظهر للنقطة M_b هو L_2 ، الدائرة $\left(B,m_b\right)$ ، والتي تتقاطع مع L_1 عند النقطتين $M_b, M_{b'}$. إذن $\overleftrightarrow{CM_b}, \overleftrightarrow{CM_{b'}}$ يلاقيان الدائرة المحيطة $\left(O,R\right)$ عند الرأس الثالثة A, A' للمثلث المطلوب $ABC, A'BC$



شكل 19 − 9

في الحالة السابقة ، أعطتنا المعطيات الواردة حلين مختلفين. وبالطبع ، فالأطوال المعطاة قد لا تعطينا محال هندسية تتقاطع مع بعضها البعض مما يؤكد أن بعض الحالات ليس لها حل.

الإنشاء رقم 102 $\{h_a, m_a, R\}$.

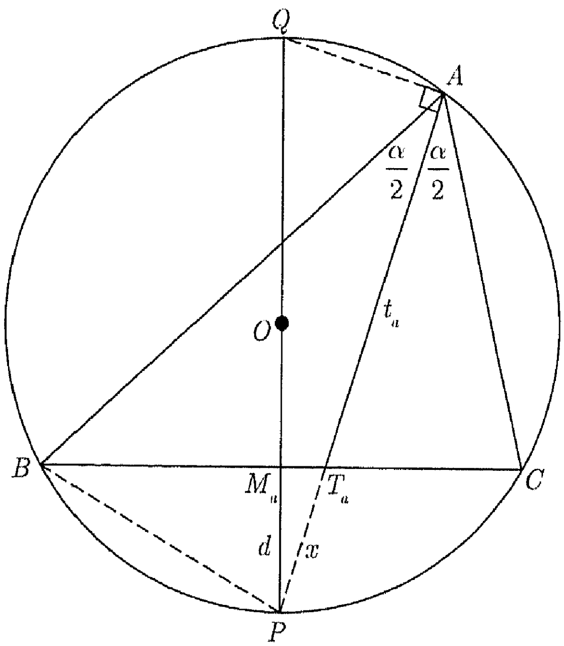


شكل 20 – 9

لنفرض أن المثلث موجود بالفعل، وعليه ففي المثلث القائم AH_aM_a ، نعلم طول الوتر $AM_a = m_a$ ، وطول ضلع القائمة $AH_a = h_a$ ؛ لذا فهذا المثلث يمكن تحديده. كذلك، يمكننا إيجاد مركز الدائرة المحيطة بالمثلث لأنه يقع على المنصف العمودي للضلع $\overline{BC}$ ، والذي بدوره عمودي على $\overleftrightarrow{M_aH_a}$ عند النقطة M_a ، وبالطبع يقع هذا المركز على بعد معلوم R من الرأس A. وبالتالي يكون الإنشاء، برسم المثلث القائم الزاوية AH_aM_a ، المعلوم طول وتره $AM_a = m_a$ ، وطول ضلع القائمة فيه $AH_a = h_a$ (انظر الشكل 20 – 9). إذن أحد المحال الهندسية لمركز

الدائرة المحيطة O هو L_1 ، الدائرة (A,R) ، وهناك محل هندسي آخر للنقطة O هو L_2 ، العمودي على $\overleftrightarrow{M_aH_a}$ عند النقطة M_a . هذه المحال الهندسية تتقاطع في مركز الدائرة المحيطة O. وأخيراً ستقطع (O,R) المستقيم $\overleftrightarrow{M_aH_a}$ عند النقاط B,C واللتين هما الرأسان الباقيتان لنحصل على المثلث المطلوب ABC .

الإنشاء رقم 105 $\{a,t_a,R\}$.



شكل 21 − 9

لنفرض أن المثلث المطلوب ABC موجود بالفعل، وكذلك دائرته المحيطة (O,R) التي قطرها العمودي ينصف $\overline{BC}$ ويقطعها في النقطة M_a ويلاقي الدائرة عند P,Q كما في الشكل 21 − 9. منصف الزاوية BAC ، $\overline{AT_a}$ سيلاقي الدائرة أيضاً

عند P. وكما أشرنا في الإنشاء رقم 74، النقطة P هي منتصف $\widehat{BPC}$، إذن $\angle QAP$ قائمة لأنها زاوية محيطية منشأة في نصف دائرة، والمثلثان PAQ, PM_aT_a متشابهان حيث إنهما يشتركان في $\angle APQ$، وهذه العلاقة تعطينا التناسب $\frac{PT_a}{PM_a} = \frac{PQ}{PA}$.

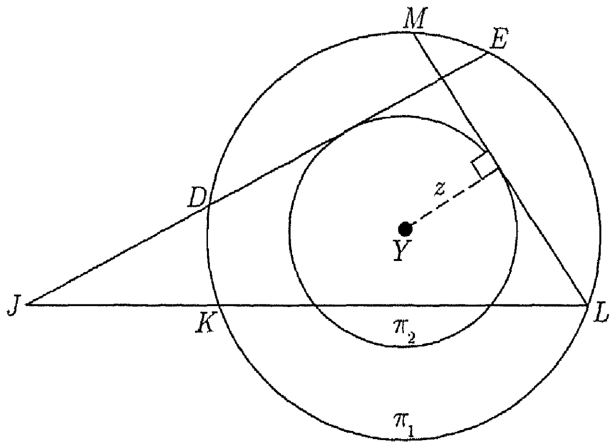
وكما هو مبين في الشكل 21 — 9، يمكننا استخدام الأطوال الموضحة لنحصل على نفس التناسب ولكن على الصورة: $\frac{x}{d} = \frac{2R}{x + t_a}$.

لأن $\overline{PQ}$ قطر للدائرة المحيطة، فطوله $2R$ من المعطيات، وكذلك t_a معطى. أما الطول d فيمكننا بسهولة العثور عليه حسب الصيغة $d = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$، بمساعدة رسم الوتر الذي طوله a في الدائرة المحيطة، وذلك لأن d هي المسافة بين من منتصف الوتر ومنتصف القوس المقابل له. (هل لك أن تثبت أن $d = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$ ؟).

إذن من التناسب الأخير نستطيع الحصول على المعادلة $x\left(x + t_a\right) = d\left(2R\right)$ والتي تحتوى على الطول x، والأطوال المعطاة $d, t_a, 2R$. والآن، سنعمل على الحل الهندسي للمعادلة التي على الصورة $x\left(x + u\right) = vw$ حيث u, v, w أطوال معلومة. على أي مستقيم أنشئ $\overline{JK}$ التي طولها v، $\overline{JL}$ التي طولها w، ثم أخيراً، ارسم $\overline{LM}$ التي طولها u في أي اتجاه، ثم أنشئ الدائرة π_1 (انظر الشكل 22 — 9). أوجد المسافة ذات الطول z من مركز الدائرة حتى منتصف $\overline{LM}$، ثم ارسم الدائرة $\left(Y, z\right)$ وسمها π_2 وارسم لها مماساً من النقطة الخارجية J ليقطع الدائرة π_1 عند النقطتين D, E. من الإنشاء، الوتران $\overline{DE}, \overline{LM}$ لهما نفس البعد عن المركز Y، وبالتالي $DE = ML$.

وأخيراً، لأن $JD \cdot JE = JK \cdot JL$ ، أي أن $JD \cdot \left(JD + DE\right) = JK \cdot JL$
أو $vw = \left(JD + u\right) \cdot JD$. إذن ؛ $JD = x$ ، وبالتالي المعادلة المطلوبة $x\left(x + u\right) = vw$.

ولوضع هذه الخطوات معاً لإنشائنا الأصلي، سنبدأ برسم الدائرة المحيطة $\left(O, R\right)$ ، ونضع فيها الوتر



شكل 22 − 9

$\overline{BC}$ والذي طوله a. العمود المنصف للوتر BC سيعطينا $d = PM_a$ ، $2R = PQ$ للخطوات في الإنشاء القادم الذي سيكون على شكل منفصل.

فعلى أي مستقيم، ارسم $JK = PM_a = d$ ، و $JL = PQ = 2R$. وفي أي اتجاه، ارسم من L $\overline{LM}$ التي طولها t_a . ارسم الدائرة المحيطة بالمثلث KLM ، ثم العمود من مركزها إلى $\overline{LM}$. ثم ارسم الدائرة π_2 المتحدة المركز مع الدائرة π_1 وتمس $\overline{LM}$. وكما في الفصل الأول من الكتاب، نرسم المماس $\overleftrightarrow{JDE}$ للدائرة π_2 ، ومما قدمناه سابقاً من أن $JD = x$ ، وبالعودة للشكل الأول، ارسم الدائرة $\left(P, x\right)$

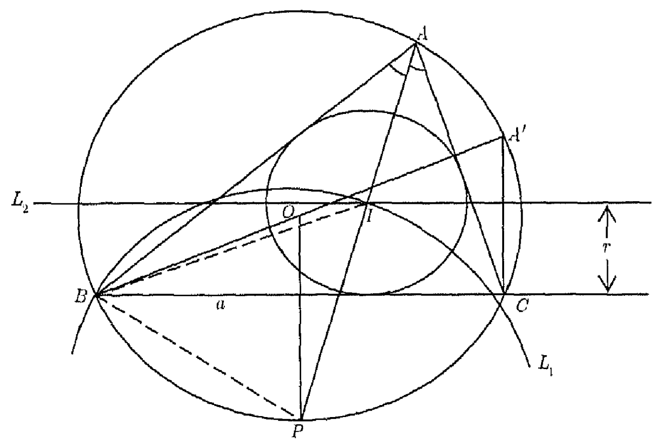
لتقطع $\overline{BC}$ في T_a ، وأخيرا سيلاقي $\overleftrightarrow{PT_a}$ الدائرة المحيطة في النقطة A التي هي الرأس الثالثة من المثلث المطلوب ABC .

المناقشة

لقد استخدمنا هنا الكثير من المفاهيم الجبرية والهندسية الجيدة وتركنا بعض التفاصيل والتعليقات، ولا يفوتنا أن نشير إلى أنه في الشكل الأصلي، النقاط الأربع A, Q, M_a, T_a تقع جميعاً على دائرة واحدة (قطرها $\overline{QT_a}$) لأن كلاً من $\angle T_aAQ, \angle T_aM_aQ$ زاويتان قائمتان.●

الإنشاء رقم 115 $\{a, \alpha, r\}$.

هذا الحل يقودنا أيضا لبعض العلاقات الهندسية الشيقة التي قد تكون غير مألوفة لدى القارئ. لنفرض كالمعتاد أن المثلث المطلوب موجود بالفعل. نعلم أن منصف $\angle BAC$ يمر بمركز الدائرة الداخلية I للمثلث وكذلك نقطة المنتصف P للقوس المقابل $\overset{\frown}{BPC}$ في الدائرة المحيطة بالمثلث (انظر الشكل 23 – 9)



شكل 23 – 9

لأن $\angle BCA, \angle BPI$ تحصران $\overset{\frown}{AB}$ ؛ إذن

$$m\angle BCA = m\angle BPI = \gamma$$

وأيضاً، لأن كلاً من $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AI}$ منصفان لزاويتين من زوايا المثلث المطلوب ABC ؛ فلدينا

$$m\angle BPI = m\angle PBC + m\angle CBI = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

ولأن $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ؛ إذن $m\angle BIP = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ ، وعليه فإن ΔBPI متطابق الضلعين حيث $\overline{BP} \cong \overline{PI}$ ، ولكن $\overline{BP}$ يمكن الحصول عليه من المعطيات ؛ لأن a, α كما أشرنا قبل ذلك في هذا الفصل يكفيان لتعيين الدائرة المحيطة ، وإذا وضعنا الوتر المعلوم $\overline{BC}$ في الدائرة المعلومة (O, OB) ، فيمكننا بسهولة رسم نصف القطر $\overline{OP}$ الذي هو عمود منصف للوتر، ثم نرسم $\overline{PB}$. وبالتالي يكون لدينا محل هندسي أول L_1 لمركز الدائرة الداخلية I وهو الدائرة (P, PB) المتاحة من خلال المعطيات. I لها محل هندسي آخر يمكننا استنتاجه من أن الدائرة الداخلية للمثلث تمس جميع أضلاع المثلث المطلوب من الداخل ومركز هذه الدائرة I يبعد مسافة قدرها r عن كل ضلع من أضلاعه، إذن المحل الهندسي الآخر هو المستقيم L_2 ، والذي يوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ويبعد عنه من أعلى مسافة قدرها r. وعليه، وبعد هذا التحليل، يكون الإنشاء كالتالي.

ارسم المثلث القائم الزاوية BCA' بحيث $BC = a$ وزاويته القائمة هي C ، $m\angle CBA'$ تساوي متممة α ، ثم أنشئ الدائرة المحيطة بهذا المثلث. هذه الدائرة (O, OB) هي الدائرة المحيطة بالمثلث المطلوب لأن أي زاوية ستنشأ على $\overset{\frown}{BA'C}$ سيكون لها القياس α. ثم ارسم نصف القطر $\overline{OP}$ عمودي على $\overline{BC}$ ، وارسم الدائرة (P, PB) التي هي المحل الهندسي الأول L_1 للمركز I. والآن لنرسم المحل

الهندسي الثاني L_2 ، الذي يوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ويعلوه بمسافة قدرها r. هذان المحلان الهندسيان يلتقيان عند مركز الدائرة الداخلية I ؛ وبالتالي $\overleftrightarrow{PI}$ يلاقي الدائرة المحيطة عند النقطة A التي هي الرأس الثالثة للمثلث المطلوب ABC .

المناقشة

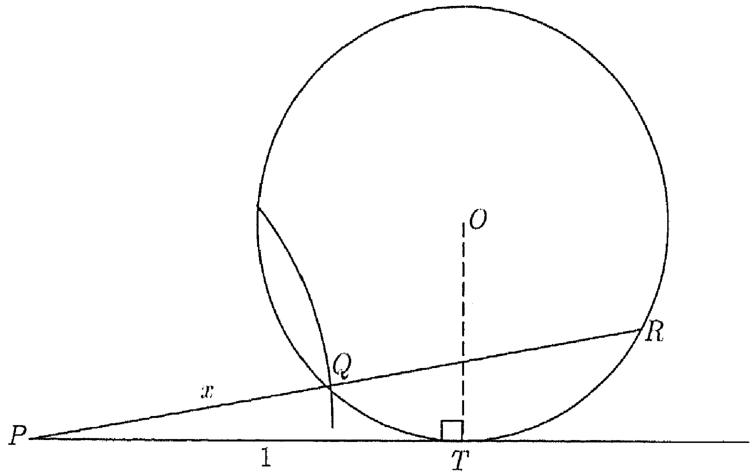
بالطبع L_1, L_2 يجب أن يلتقيا إذا كان لـ I وجود، وإذا التقيا مرة فقد يلتقيان مرة أخرى. وسنترك للقارئ المجال لمزيد من المناقشة حول عدد وطبيعة الحلول.●

الإنشاء رقم 122 $\{h_a, h_b, r\}$.

لن نقوم بحل هذه المسألة بشكل كامل هنا وبدلاً من ذلك سوف نشير إلى كيف نحولها إلى مسألة قد قمنا بحلها بالفعل، وبداية لنسترجع النظرية $13-7$ التي تنص على أن :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

وبالتعامل جبرياً مع هذه المعادلة التي تحتوي على أربعة مجاهيل، نجد أننا في حالة معرفتنا ثلاثة منها، فيمكننا الحصول على المجهول الرابع. ولأن مسألتنا تبدأ بمعرفتنا لكل من h_a, h_b, r ، فبالتالي نستطيع الحصول على h_c ، وهذا يحيلنا إلى الإنشاء رقم 16 ، والذي ينشئ مثلثاً بمعلومية ارتفاعاته الثلاثة.



شكل 24 – 9

ولكن يظل هناك سؤال حول إنشاء معكوس أي طول x. وللإجابة عن هذا السؤال دعونا نأخذ القطعة PT طولها الوحدة وتمس أي دائرة عند النقطة T (انظر الشكل 24 – 9). ثم نرسم دائرة أخرى (P,x) تقطع الأولى في النقطة Q ، كما نرسم $\overleftrightarrow{PQ}$ يقطعها أيضا في النقطة R . ولأن :

$$PQ \cdot PR = PT^2 = 1$$

فإن هذا يتطلب أن يكون PQ, PR كل منهما معكوسا للآخر. وإذا كانت (P,x) لا تقطع الدائرة الأولى فما عليك سوى أخذ أكبر دائرة ممكنة تمس PT عند النقطة T وتكمل كما سبق.

أما الحل الفعلي لهذا الإنشاء فسنشير إليه هنا ولن نكمله كما ذكرنا سابقاً. وسنستخدم الإنشاء العكسي للحصول على معكوس كل h_a, h_b, r. وبالطرح سنحصل على معكوس h_c :

$$\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}-\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}$$

ثم أوجد معكوس هذا المعكوس للحصول h_c نفسها . ثم نعود للإنشاء رقم 16 والذي نفذناه سابقاً في صفحة 271.

الإنشاء رقم 150 $\{\alpha, h_a, s\}$.

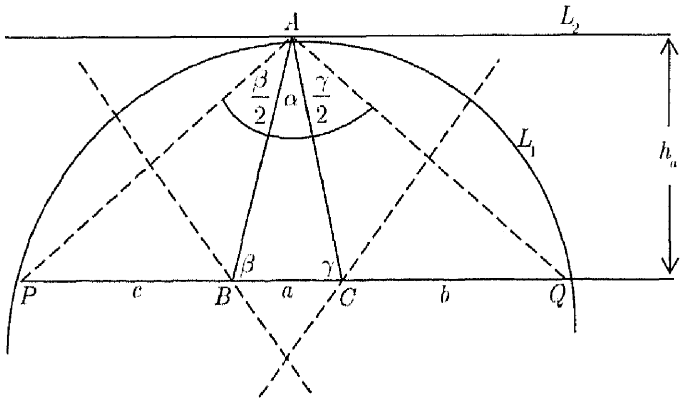
لنفرض أن المثلث المطلوب إنشاؤه موجود بالفعل. لنأخذ على $\overleftrightarrow{BC}$ كلاً من $BP = BA = c$ ، $CQ = CA = b$ (انظر الشكل 25 – 9). إذن طول $\overline{PBCQ}$ يساوي $a+b+c=2s$ وهذا الناتج معلوم من المعطيات. في المثلث المتطابق الضلعين BPA ، قياس كل زاوية من زاويتي قاعدته المتطابقتين يساوي نصف قياس الزاوية الخارجة عند الرأس B ، أي أن $m\angle PAB=\frac{1}{2}\beta$.

وبالمثل $m\angle QAC=\frac{1}{2}\gamma$. وعليه يكون لدينا عند الرأس A :

$$m\angle PAQ=\frac{1}{2}\beta+\alpha+\frac{1}{2}\gamma=\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\gamma\right)+\frac{1}{2}\alpha=90^\circ+\frac{1}{2}\alpha$$

إذن $m\angle PAQ$ هي أيضا معلومة لأنها جاءت بدلالة المعطيات الأصلية في المسألة .

على القطعة المعلومة $\overline{PQ}$ ، النقطة A تقابل الزاوية المعلومة $90^\circ+\frac{1}{2}\alpha$ ، وبالتالي L_1 محل هندسي لها والذي هو قوس دائري معلوم، و L_2 هو المحل الهندسي الآخر لنفس النقطة A والذي يوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ويقع فوقها بمسافة قدرها h_a. والآن لنبدأ إنشاء المثلث المطلوب، وأولى خطواتنا لذلك هي إيجاد L_1.

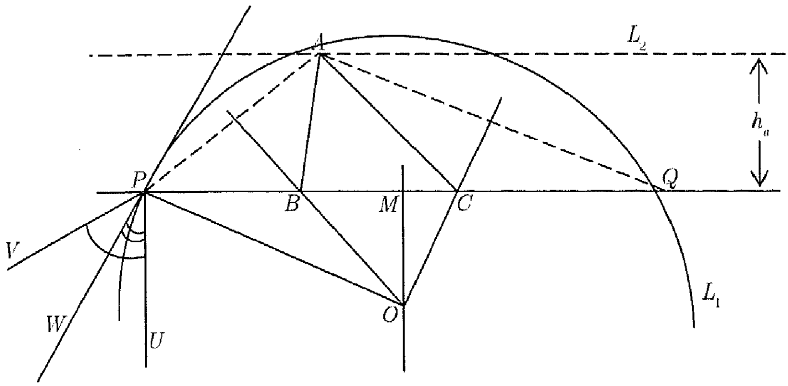


شكل 25 – 9

على أي خط ، ارسم $PQ = 2s$ التي هي طول محيط المثلث المطلوب ABC ، وعند النقطة P أنشئ $\overleftrightarrow{PU}$ عمودياً على $\overleftrightarrow{PQ}$ ، ثم أنشئ $\angle UPV$ تطابق الزاوية المعلوم قياسها α (انظر الشكل 26 – 9). نرسم $\overleftrightarrow{PW}$ ينصف $\angle UPV$ ، وبالتالي :

$$\angle QPW = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$$

وأما O مركز القوس L_1 فنحصل عليها من تقاطع العمود المنصف لـ $\overline{PQ}$ مع العمود على $\overleftrightarrow{PW}$ عند P .أخيراً (O, OP) هو فعلاً المحل الهندسي L_1. أما المحل الهندسي الثاني L_2 فمن السهل رسمه كما أشرنا في الشكل 26 – 9 ، ليتقاطع المحلان الهندسيان عند A وهي رأس من رؤوس المثلث المطلوب. وأخيراً العمودان المنصفان لكل من $\overline{AP}, \overline{AQ}$ يلاقيان الخط الرئيسي عند النقطتين B, C ، وهما الرأسان الباقيتان للمثلث المطلوب ABC.



شكل 26 — 9

لقد قمنا بحل عدد قليل من تلك القائمة التي تضم .. مشكلة ، ولكننا ، وكما نأمل، اخترنا منها نماذج تقدم لنا مادة هندسية شيقة. ونحن نحث القارئ على استكشاف هذه المنطقة بكل تفاصيلها لأنه سوف يجد مادة ثرية شيقة ترضي طموحه.

تدريبات

1. بالعودة للإنشاء رقم 20 (الشكل 12 — 9). هل نستطيع أن نأخذ M_b كنقطة تقاطع أخرى للمحلين الهندسيين ؟ وضح إجابتك.
2. بالعودة للإنشاء رقم 29 (الشكل 13 — 9). القوس $\left(C, 2m_c\right)$ ربما يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ في نقطة أخرى D' . ناقش الإنشاء والحل الذي ستحصل عليه.
3. بالعودة للإنشاء رقم 29 (الشكل 13 — 9). إذا كان طول a يساوي 10 سم ، فما هو الطول الممكن للارتفاع h_b ؟ وللمتوسط m_c ؟ موضحاً إجابتك.
4. بالعودة للإنشاء رقم 35 (الشكل 14 — 9). تحت أي شروط $\overleftrightarrow{AK}, \overleftrightarrow{H_aM_a}$ لا يلتقيان ؟ ثم وضح كيف يتأثر حلنا في هذه الحالة.

5. بالعودة للإنشاء رقم 35 (الشكل 14 − 9). نفرض أننا أخذنا K, H_a في نفس الاتجاه من $\overline{AM_a}$ بدلاً من جهتين مختلفتين منها كما بالشكل. أكمل الشكل الجديد وناقش النتائج.

6. بالعودة للإنشاء رقم 35 (الشكل 14 − 9). إذا كان : $m_a = 10$، ناقش الطول الممكن لكل من h_a, h_b لأي حل أو لأي عدد من الحلول.

7. بالعودة للإنشاء رقم 43 (الشكل 15 − 9). ما الشروط التي يجب أن تكون عليها الأطوال m_a, m_b, m_c لنحصل على حل.

8. بالعودة للإنشاء رقم 43 (الشكل 15 − 9). ما النتائج إذا تساوي طولا متوسطين أو أطوال المتوسطات الثلاثة في المثلث.

9. بالعودة للإنشاء رقم 56 (الشكل 16 − 9). ما الشروط التي تقع على كل من a, h_a لتجعل من المستحيل إنشاء المثلث القائم BCH_b .

10. بالعودة للإنشاء رقم 56 (الشكل 16 − 9). ما هو طول منصف الزاوية $\overline{CT_c}$ الذي من شأنه أن يجعل من المستحيل على $\overleftrightarrow{BT_c}, \overleftrightarrow{CH_b}$ أن يتقاطعا.

11. بالعودة للإنشاء رقم 74 (الشكل 18 − 9). ناقش الحالات التي لا يوجد فيها أي مساواة بين الأطوال الثلاثة المعطاة.

12. بالعودة للإنشاء رقم 74 (الشكل 18 − 9). أخذنا M_a, T_a في نفس الاتجاه بالنسبة للنقطة H_a . ناقش النتائج التي تترتب على وقوع . بين M_a, T_a .

13. بالعودة للإنشاء رقم 74 (الشكل 18 − 9). تحت أي شروط لا تلاقي الدائرة (O, OA) المستقيم $\overleftrightarrow{H_aM_a}$ ؟

14. بالعودة للإنشاء رقم 99 (الشكل 19 − 9). ناقش إمكانية وعدد الحلول للاختيارات المختلفة للأطوال المعطاة $\{a, m_b, R\}$.

15. في الإنشاء 99 . قرر ما إذا كان يمكن التوصل إلى الشروط الكافية واللازمة التالية لأي حل

$$\sqrt{R^2 + 2a^2} - R \leq 2m_b \leq \sqrt{R^2 + 2a^2} + R$$

16. بالعودة للإنشاء رقم 102 (الشكل $20-9$). تحت أي شروط يكون من المستحيل رسم المثلث القائم الأول AH_aM_a ؟

17. بالعودة للإنشاء رقم 102 (الشكل $20-9$). تحت أي شروط لا يتقاطع المحلان الهندسيان L_1, L_2 .

18. بالعودة للإنشاء رقم 102 (الشكل $20-9$). المحلان الهندسيان L_1, L_2 يحتمل أن يتقاطعا مرتين عند O كما يظهر بالشكل، O' والتي لا تظهر. ناقش هذا الاحتمال .

19. بالعودة للإنشاء رقم 102 (الشكل $20-9$). إذا كان لدينا نقطة التقاطع O، فمتى نفشل في الحصول على الرأسين B, C ؟ وضح إجابتك.

تمريننا الأخير في هذا الفصل هو الأصعب والأهم.

20. أكمل حلول أكبر عدد ممكن من المشكلات الواردة في القائمة التي تحتوى على 179 مشكلة في الصفحات $267-265$. وناقش في كل مشكلة الشروط وإمكانية وجود الحل والعلاقات بين الشروط وطبيعة وعدد الحلول .

الفصل العاشر

إنشاءات الدائرة

مقدمة

في هذا الفصل، سنستقصي تفاصيل الحلول التي تنطوي على إنشاءات الدائرة التي تناسب شروطاً مفترضة. ففي حالة المسألة الخاصة بإنشاء دائرة تمر بالرؤوس الثلاثة لمثلث التي تسمى الدائرة المحيطة بالمثلث المعطى، ويكون حلها - كما نعلم - وحيداً، أي أن الدائرة الناتجة وحيدة، مركزها O هو نقطة تقاطع الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث، أي أن الدائرة المطلوبة مركزها O ونصف قطرها $\overline{OA}$ (أو $\overline{OB}$ أو $\overline{OC}$). وأيضاً، كما ناقشنا سابقاً، فإن إنشاء الدائرة الداخلية لمثلث معطى، وهي الدائرة التي تمس أضلاع المثلث الثلاثة من الداخل هو إنشاء يقود إلى حل وحيد أيضاً. فمنصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتقاطع جميعاً في مركز الدائرة الداخلية I ونصف قطرها هو المسافة العمودية بين I وأي ضلع من أضلاع المثلث الأصلي الثلاثة.

مسألة أبولونيوس The Problem of Apollonius

كلتا المسألتين السابقتين تنطوي على إنشاء دائرة تمر بنقاط معلومة أو تمس مستقيمات أيضاً معلومة. ولعل التعميم الطبيعي لذلك هو مسألة تتحدث عن إنشاء

دائرة تمر بنقطة واحدة أو عدة نقاط (P) وتمس مستقيماً أو عدة مستقيمات (L)، وربما تمس أيضاً دائرة أو أكثر من دائرة (C).

هذه المسألة العامة يطلق عليها أحياناً "مسألة أبولونيوس"* وهي تحلل إلى عشر حالات هي:

1.	PPP	3.	PLL	5.	PPC	7.	LLC	9.	LCC
2.	PPL	4.	LLL	6.	PLC	8.	PCC	10.	CCC

وسوف نبحث كل حالة من تلك الإنشاءات كالتالي:

الإنشاء 1 : PPP

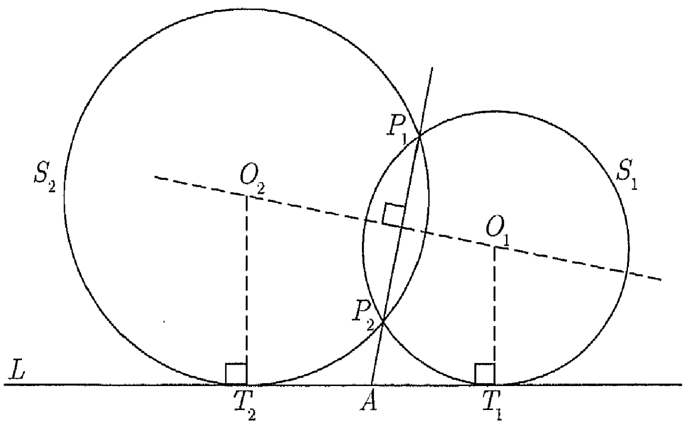
لقد ناقشنا تلك الحالة والتي تتحدث عن إنشاء دائرة تمر بثلاث نقاط، وذلك عندما أنشأنا دائرة تمر برؤوس مثلث، ولكن هناك حالة خاصة ينبغي الإشارة إليها، وهي عندما لا تشكل النقاط الثلاث مثلثاً، أي تكون على استقامة واحدة. وفي هذا الوضع تكون "الدائرة" الوحيدة التي تمر بتلك النقاط الثلاثة هي "دائرة" ذات نصف قطر غير منته، أي خط مستقيم.

---

* عاش أبولونيوس في الفترة مابين ٢٦٢-١٩٠ قبل الميلاد حيث ولد في مدينة يونانية صغيرة تقع جنوب آسيا الصغرى تدعى بيرجا. و اكتسب أبولونيوس شهرته من أعماله ودراساته حول القطوع المخروطية، بالإضافة لعملة بشكل عام في الهندسة المخروطية. وقد ذكر بابوس Pappus أن هناك ستة أعمال هامة تنسب لأبولونيوس تشكل مجتمعة جزءاً من أهم أعماله وأكثرها قيمة. ولكن العمل الوحيد الذي تم إنقاذه بالفعل هو كتابان (تمت كتابتهما أصلاً باللغة العربية ثم ترجمها للاتينية أدموند هالي Edmund Hally في عام ١٧٠٦م) (يتبع ←) عالج فيهما ما يسمى بمسائل تماس الدوائر والتي تعرف اليوم بمسائل أبولونيوس والتي سوف نقوم بدراستها خلال هذا الفصل. وقد أشار إقليدس Euclid في كتابه " العناصر " في الباب الرابع إلى أول حالتين منها. وأكمل أبولونيوس في كتابه الأول الحالات :٣، ٤، ٥، ٦، ٨، ٩. وضمن في كتابه الثاني الحالتين :٧، ١٠. وقد افتتن العديد من الرياضيين العظام السابقين أمثال نيوتن Newton ، و فيتا Vieta بالحالة العاشرة. وقد بذل الكثيرون من الرياضيين جهداً عظيماً لإعادة بناء وترميم الكتب الأربعة الباقية لأبولونيوس.

الإنشاء 2 : PPL

إذا كان الحل متاحاً، فسوف نرى المستقيم الذي يحوي الوتر $\overline{P_1P_2}$ يلاقي المستقيم المعطى عند النقطة A ، وهي النقطة الخارجية التي تقع على المماس ورسم منها القاطع إلى الدائرة (انظر الشكل $1-10$). ولكن نعلم أن طول المماس – في مثل هذه الحالة – هو الوسط المتناسب بين طول كامل القاطع وطول الجزء الخارجي منه.



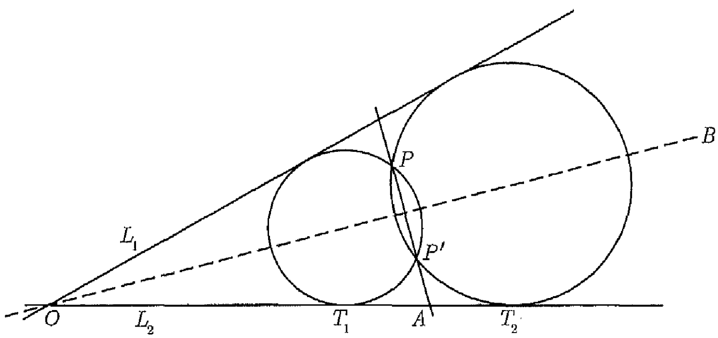
شكل $1-10$

لنفرض أن $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ يقطع L في النقطة A. ثم نوجد بالإنشاء الطول $AT_1 = AT_2 = t$ من معلومية الطولين AP_1, AP_2 ، حيث T_1, T_2 على L وعلى جهتين مختلفتين من A. إذن، T_1, T_2 نقطتا التماس للدائرتين المطلوبتين على المستقيم L اللتين مركزاهما نقطتا تقاطع العمود المنصف للقطعة $\overline{P_1P_2}$ والعمودين المقامين من T_1, T_2.

الإنشاء 3 : PLL

إذا كان الحل متاحاً، فإننا بشكل عام سنحصل على حلين لهذا الإنشاء يشتركان في النقطتين P, P'. وبالتأمل قليلاً حول وضع هاتين النقطتين نجد أنهما متماثلتان حول منصف الزاوية $\overrightarrow{OB}$.(انظر الشكل 2 – 10). هذا بالإضافة إلى أن المستقيم الحامل للوتر $\overline{PP'}$ حتماً يقطع أحد ضلعي الزاوية وليكن L_2 عند النقطة A.

والآن، بالطبع يمكننا إيجاد $\overrightarrow{OB}$، كمنصف للزاوية بين المستقيمين المعطيين L_1, L_2، كما يمكننا أيضا الحصول على P' حيث إنها صورة النقطة المعطاة P حول $\overleftrightarrow{OB}$. وعليه نكون قد حولنا الحالة PLL إلى الحالة التي ناقشناها سابقا PPL.



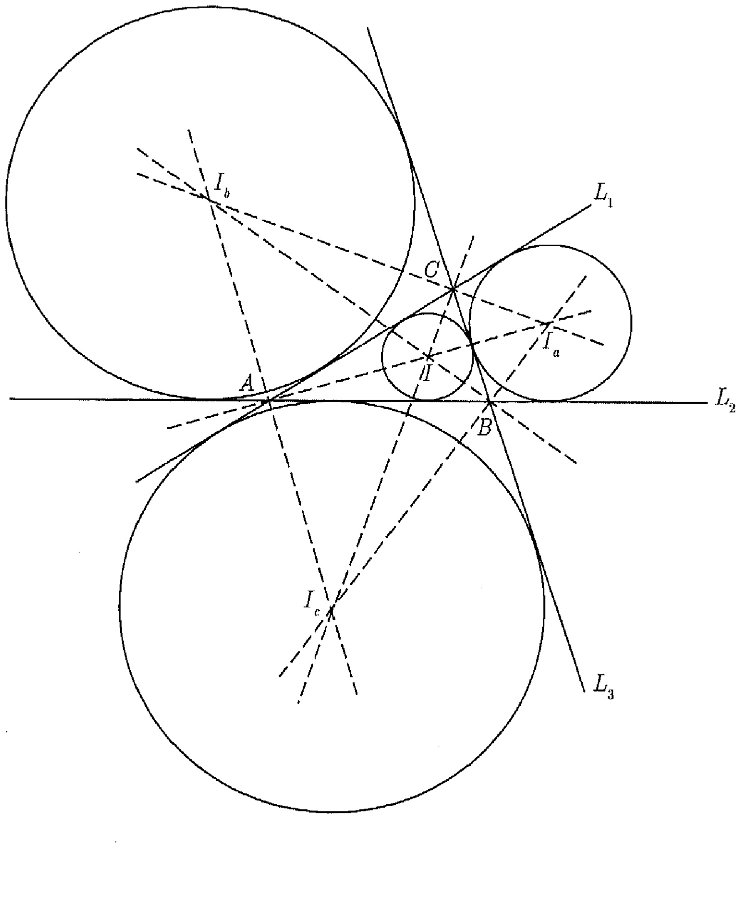
شكل 2 – 10

الإنشاء 4 : LLL

لقد ناقشنا قبل ذلك الدائرة الداخلية لمثلث ينتج من تقاطع ثلاثة مستقيمات في ثلاث نقاط مختلفة A, B, C. (انظر الشكل 3 – 10). الإنشاء هنا مباشر. بما أن مركز

أي دائرة تمس ثلاثة مستقيمات يجب أن يقع على منصفات الزاوايا التي تشكلها تلك المستقيمات. وبمجرد معرفة المراكز، فمن السهولة الحصول على أنصاف أقطار هذه الدوائر (كيف؟). وبعد ذلك نرسم الدوائر المطلوبة.

وعليك عزيزي القارئ أن تدرس هذا الشكل بعناية فهو يظهر لك بعض الخواص الرائعة التي تتحدث عن وقوع النقاط على استقامة واحدة والتعامد.



شكل 3 – 10

الإنشاء 5 : PPC

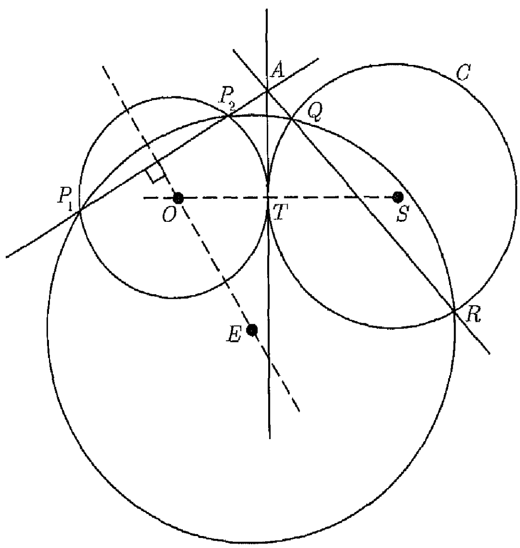
لنفرض أن حل هذا الإنشاء موجود. إذن ؛ ستتقاطع دائرتان في نقطة ولتكن T والتي عندها نستطيع رسم مماس مشترك للدائرتين. وإذا أخذنا من أي نقطة A تقع على هذا المماس المشترك، ورسمنا منها قاطعين أحدهما يقطع الدائرة المطلوبة في النقطتين P_1, P_2 ، والآخر يقطع الدائرة المعطاة في Q, R (انظر الشكل 4 − 10)، فيكون لدينا :

$$AP_1 \cdot AP_2 = AT^2 = AR \cdot AQ$$

أي أن :

$$AP_1 \cdot AP_2 = AR \cdot AQ$$

إذن؛ النقاط P_1, P_2, Q, R هي رؤوس لشكل رباعي دائري (انظر التدريب رقم 18 في نهاية هذا الفصل). والآن بسهولة يمكن رسم دائرة تمر بالنقطتين P_1, P_2 وتقطع الدائرة المعطاة C.



شكل 4 − 10

لنبدأ الآن في خطوات الإنشاء. أولاً ارسم المنصف العمودي للقطعة $\overline{P_1P_2}$ (الذي هو المحل الهندسي لكل مراكز الدوائر التي تمر بالنقطتين P_1, P_2). واختر على هذا العمودي نقطة ولتكن E ، ثم ارسم الدائرة $\left(E, EP_1\right)$ لتقطع الدائرة المعطاة C في Q, R ، وارسم أيضاً $\overleftrightarrow{QR}$ ليقطع $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ في النقطة A. ومنها ارسم المماس $\overleftrightarrow{AT}$ للدائرة المعطاة ثم ارسم $\overleftrightarrow{ST}$ ليمر بمركز الدائرة المعطاة S والنقطة T ويقطع العمود المنصف للقطعة $\overline{P_1P_2}$ عند النقطة O التي هي مركز الدائرة المعطاة (المماس $\overleftrightarrow{AT}$ للدائرة المعطاة هو واحد من مماسين ممكنين، ناقش هذا الإنشاء مستخدماً المماس الآخر $\overleftrightarrow{AT'}$ غير المرسوم في الشكل 4 − 10).

الإنشاء 6 : PLC

لنفرض أن الحل موجود لدينا. ويتمثل في الشكل 5 − 10 في الدائرة $\left(E, EG\right)$ حيث تمس الدائرة المعطاة C عند النقطة T وتمس المستقيم المعطى L عند النقطة G ، وتمر في نفس الوقت بالنقطة المعطاة P. خط المركزين $\overleftrightarrow{OE}$ يجب أن يمر بالنقطة T (لماذا ؟). والآن ارسم عموداً يمر بالمركز O إلى الخط المستقيم L ليقطع الدائرة المعطاة في النقطتين A, B اللتين هما نقطتا النهاية لقطر الدائرة المعطاة، ثم ارسم عموداً من المركز E إلى الخط المستقيم L ليلاقيه في النقطة G التي هي نقطة التماس (لماذا ؟). ثم ارسم كلاً من $\overline{BT}, \overline{AT}, \overline{TG}$ ، وأخيراً ارسم $\overline{AP}$ ليقطع الدائرة المطلوبة عند النقطة H. وبما أن $\overleftrightarrow{OF}$ يوازي $\overleftrightarrow{EG}$ ، وكلاً من المثلثين OAT, TEG متطابق الضلعين، فإن $\angle TEG \cong \angle AOT$. أيضاً، كلتا زاويتي القاعدة فيهما أيضاً متطابقتان، ومن ذلك نستنتج أن $\angle ETG \cong \angle OAT$. وبالتالي $\overline{AT}, \overline{TG}$ تقعان على نفس الخط المستقيم، وكل من $\angle BTG$ ، $\angle BTA$ قائمة، ولأن $\angle BFG$ هي الأخرى زاوية قائمة، فإن الشكل الرباعي $BFGT$ دائري (نصف قطر دائرته

$\overline{BG}$). لذلك يكون لدينا قاطعان من النقطة الخارجية A للدائرة المحيطة بالرباعي الدائري $BFGT$. إذن ؛

$$AB \cdot AF = AT \cdot AG$$

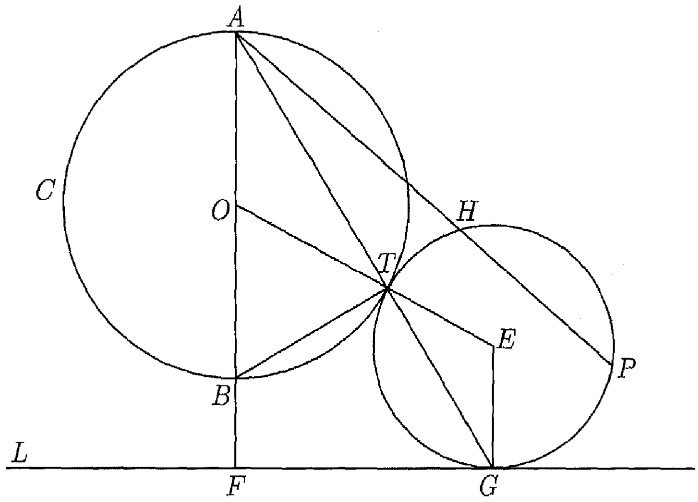
ولكن أيضاً النقاط T, G, P, H هي رؤوس رباعي دائري. إذن ؛

$$AT \cdot AG = AH \cdot AP$$

وعليه فإن :

$$.AB \cdot AF = AH \cdot AP$$

ولأن النقاط A, B, F, P موجودة ومتاحة من البداية لأنها من المعطيات ، فإننا يمكن بسهولة الحصول على النقطة H. وهكذا تكون المسألة قد تحولت إلى حالة سابقة درسناها بالفعل وهي PPL في الإنشاء الثاني.



شكل 5 − 10

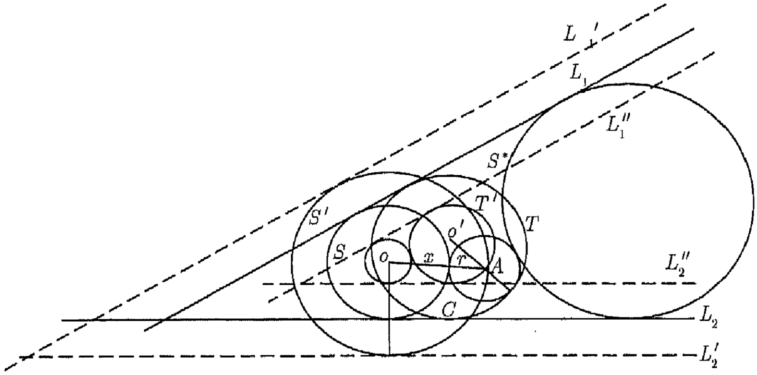
ولإيجاز الطريقة التي نحصل بها على النقطة H ، نبدأ برسم عمود من مركز الدائرة المعطاة O على الخط المستقيم المعلوم L ليلاقيه في النقطة F ، ويقطع الدائرة

C في A, B . ثم نرسم $\overleftrightarrow{AP}$ ومن العلاقة $\frac{AP}{AF} = \frac{AB}{AH}$ نستطيع إنشاء $\overline{AH}$. الآن، نستطيع الحصول على الحل باستخدام النقاط P, H, L التي تماثل النقاط P_1, P_2, L في الإنشاء الثاني.

الإنشاء 7 : LLC

لنفرض كالعادة أن الدائرة المطلوبة S موجودة كما يظهر في الشكل $6-10$. لأن الدائرة S تمس الدائرة المعطاة C ؛ لذا $\overline{OA}$ الواصلة بين مركزيهما تساوي مجموع نصفي قطري الدائرتين، نصف قطر الدائرة المطلوبة (x مثلاً)، ونصف القطر المعلوم للدائرة المعطاة r. والآن، لننشئ دائرة أخرى S' متحدة المركز مع الدائرة S ونصف قطرها $x + r$ ؛ وبالتالي تمر هذه الدائرة بمركز الدائرة المعطاة A وتمس المستقيمين L_1', L_2' الذين يوازيان على الترتيب المستقيمين المعطيين L_1, L_2 ويقعان خلفهما بمسافة قدرها r. ولكن، لأن هذه المستقيمات يمكن إنشاؤها بسهولة فعليه يتحول هذا الإنشاء إلى الإنشاء الثالث (PLL) على اعتبار أن المركز A للدائرة C هو النقطة P والمستقيمين L_1', L_2' يوازيان المستقيمين المعلومين L_1, L_2 والمسافة بينهما r.

وعلى ذلك يكون الحل - والمقصود به الدائرة S - لهذه المسألة سوف يعطينا المركز المطلوب O. ونحن نعلم عموماً أن للإنشاء رقم 3 حلين؛ ولذا سيكون لدينا هنا أيضاً حلان هما S, S^* كما هو موضح في الشكل $6-10$.



شكل $6-10$

يظل هناك احتمال آخر علينا التحقق منه : لنفرض أن الدائرة الحل T تمس الدائرة المعطاة من الداخل. وفي هذه الحالة طول خط المركزين للدائرتين T, C هو $\overline{O'A}$ والذي يساوي الفرق بين نصفي قطري هاتين الدائرتين وذلك بدلاً من المجموع كما سبق.

الآن سيكون لدينا دائرة مساعدة T' متحدة المركز مع الدائرة T وتقع داخلها ونصف قطرها $x'-r$ وكذلك تمر بالمركز A للدائرة المعطاة C وتمس المستقيمين L_1'', L_2'' اللذين يوازيان بدورهما المستقيمين المعطيين L_1, L_2 على الترتيب، ولكن عليك أن تلاحظ أن المستقيمين L_1'', L_2'' يقعان داخل الزاوية التي يشكلها المستقيمان المعطيان L_1, L_2 وليس وراءهما كما سبق. وهكذا - مرة أخرى - نتجه لحل المسألة عن طريق تحويلها للحالة (PLL) بالمعطيات التالية : النقطة A والمستقيمان L_1'', L_2''. وهكذا يكون لدينا حلان لهذه الحالة أيضاً، ولكن لا يظهر على الشكل $6-10$ إلا حل واحد هو الدائرة T.

الإنشاء 8 : PCC

لنفرض أن الدائرة المطلوبة S موجودة وتمس من الخارج الدائرتين المعطيتين C_1, C_2 عند النقطتين T_1, T_2 على الترتيب، كما يتضح في الشكل 7 − 10.

ليكن المماس المشترك $\overleftrightarrow{K_1K_2}$ للدائرتين المعطاتين يتقاطع مع الخط المستقيم $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ الذي يحمل خط المركزين في النقطة R. ولنفرض أن $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ يمر بالنقطة R (هذا صحيح هل تستطيع أن تثبته ؟). ثم نرسم المستقيمات الموضحة في الشكل 7 − 10. إذن، $\Delta U_1O_1T_1, \Delta T_1OT_2, \Delta U_2O_2T_2$ جميعها مثلثات متطابقة الضلعين وجميع زوايا قواعدها متطابقة. وبالتالي $\overleftrightarrow{O_2U_2} \parallel \overleftrightarrow{OO_1}, \overleftrightarrow{OO_2} \parallel \overleftrightarrow{O_1U_1}$. وعليه نستطيع من خلال زوجي المثلثات المتشابهة أن نحصل على :

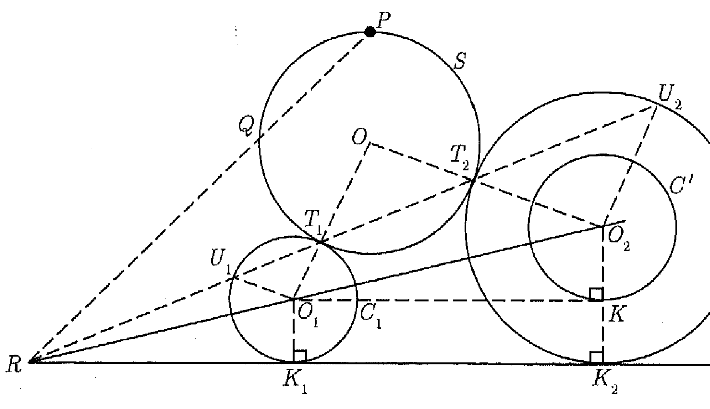
$$\frac{RU_1}{RT_2} = \frac{RO_1}{RO_2} = \frac{RT_1}{RU_2}$$

وبالتالي :

$$RU_1 \cdot RU_2 = RT_1 \cdot RT_2$$

وبالعمل على كل دائرة من الدائرتين المعطاتين نحصل على :

$$RU_1 \cdot RT_1 = RK_1^2 \quad , \quad RU_2 \cdot RT_2 = RK_2^2$$



شكل 7 − 10

إذن:

$$\left(RU_1 \cdot RT_1\right) \cdot \left(RU_2 \cdot RT_2\right) = RK_1^2 \cdot RK_2^2 = \left(RU_1 \cdot RU_2\right) \cdot \left(RT_1 \cdot RT_2\right)$$
$$= \left(RT_1 \cdot RT_2\right)^2$$

وبالتالي فإن:

$$RT_1 \cdot RT_2 = RK_1 \cdot RK_2$$

وهذا يعني أن النقاط الأربع T_1, T_2, K_2, K_1 هي رؤوس رباعي دائري (وكذلك النقاط T_1, T_2, P, Q) كما هو مبين في التدريب رقم 18. إذن:

$$RQ \cdot RP = RT_1 \cdot RT_2 = RK_1 \cdot RK_2$$

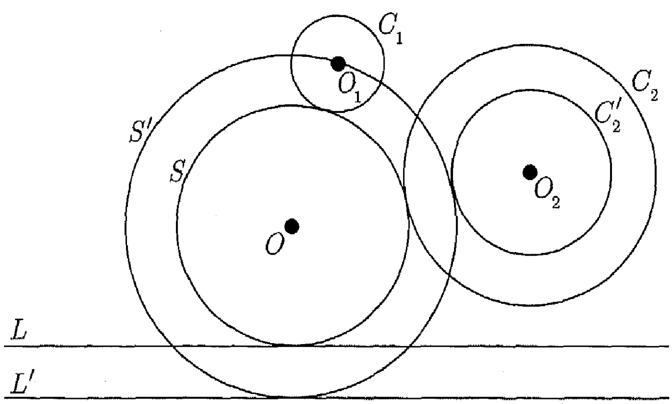
ويعد حاصل الضرب السابق معلوماً لأنه يمكن الحصول عليه مباشرة من الدائرتين المعلومتين بمجرد أن ننشئ المماس الخارجي المشترك للدائرتين (لإنشاء هذا المماس نبدأ برسم الدائرة $C' = \left(O_2, O_2K\right)$ حيث طول $\overline{O_2K}$ يساوي الفرق بين نصفي قطري الدائرتين المعطاتين، ثم نرسم مماساً للدائرة C' من النقطة O_1، أما المماس المطلوب فيرسم من الأسفل موازياً للمماس $\overleftrightarrow{O_1K}$ بمسافة قدرها O_1K_1).
من العلاقة : $RQ \cdot RP = RK_1 \cdot RK_2$، نستطيع تحديد موقع النقطة Q على $\overleftrightarrow{RP}$ بإنشاء الرابع المتناسب؛ وبالتالي تتحول المسألة إلى الإنشاء رقم 5 $\left(\text{PPC}\right)$، حيث النقطتان هما P, Q والدائرة هي إحدى الدائرتين المعطاتين.

لأن الدائرة S يمكن رسمها تمس كلاً من الدائرتين المعطاتين، ولأن النقطة P يمكن لها أن تأخذ عدة مواضع متنوعة بجوار الدائرتين المعطاتين اللتين بدورهما أيضاً يمكن أن تأخذا مواقع متنوعة بجوار بعضهما؛ ولذا فإن هناك حالات كثيرة ومعينة سنترك للقارئ التحقق منها.

الإنشاء 9 : LCC

لنفرض - كما اعتدنا - أن الحل موجود أمامنا كما هو موضح في الشكل 8 − 10. الآن، لنفرض أن لدينا الدائرتين C_1, C_2 اللتين نصفا قطريهما r_1, r_2 على الترتيب. وليكن L هو المستقيم المعطى. فإذا رسمنا الدائرة S' نصف قطرها $\overline{OO_1}$ وتتحد في المركز مع الدائرة الحل S ، فإنه سيكون لدينا " توسيع " للدائرة الحل من الدائرة S إلى الدائرة S' التي تمر بالنقطة O_1 ، وتمس دائرة جديدة نسميها C_2' نصف قطرها يساوي الفرق بين نصفي قطري الدائرتين المعطاتين وتتحد في المركز مع الدائرة C_2. الدائرة S' تمس المستقيم L' الذي بدوره يوازي المستقيم المعطى L ويقع أسفله بمسافة قدرها r_1.

واضح أنه يمكننا أن ننشئ الدائرة C_2' والخط المستقيم L' ؛ وبالتالي يمكننا إنشاء الدائرة S' وذلك بنفس طريقة حل الإنشاء السادس (PLC) حيث النقطة المعطاة هي O_1 ، والمستقيم هو L' ، والدائرة هي C' وهذا يعطينا مباشرة الدائرة S' ، وعليه يكون من السهل الحصول على الدائرة الحل S.



شكل 8 − 10

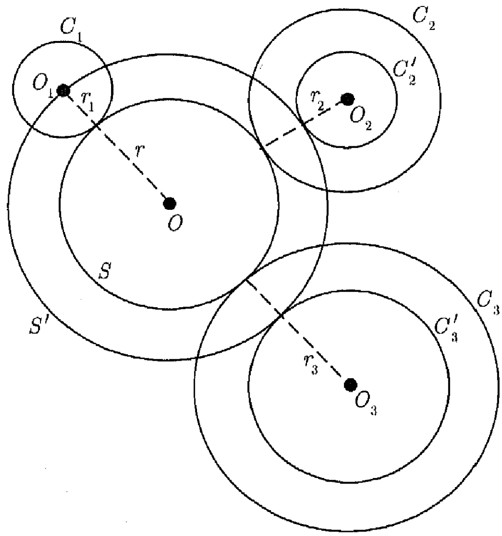
الإنشاء 10 : CCC

هذا هو الإنشاء الأخير في هذه المجموعة من الإنشاءات وهو ما يطلق عليه أيضاً " مسألة أبولونيوس Problem of Apollonius " أو " دائرة أبولونيوس Circle of Apollonius".

أما بخصوص الدوائر الثلاث المعطاة فإنها تأخذ مواقع مختلفة وحالات كثيرة، كل موقع منها يقود لعدد من الحلول المختلفة. (هل تستطيع رسم الدوائر المعطاة بحيث لا يكون أي حل ؟).

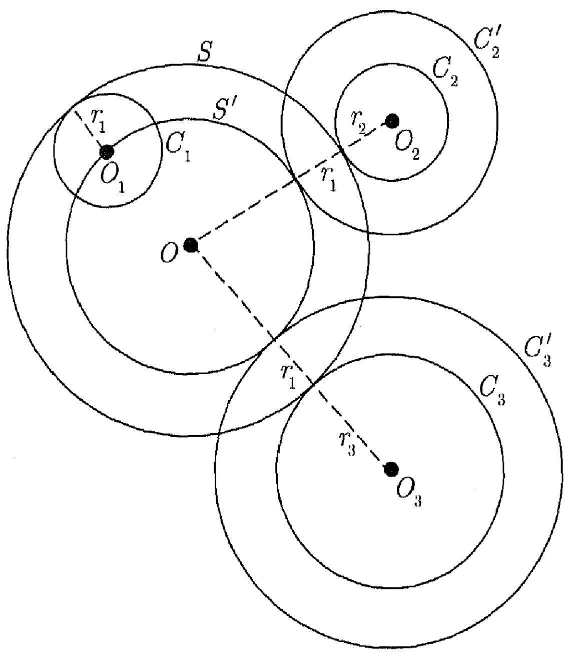
لذا سوف نناقش هنا أكثر تلك الحالات عمومية، وهي أن تكون هذه الدوائر في وضع تباعد، وهذا الوضع يقودنا في العموم إلى ثمانية حلول. سنرسم منها حالة واحدة فقط – الدائرة التي تمس الدوائر الثلاث المعطاة من الخارج. أما الحلول الأخرى ففيها تمس الدائرة الحل بعض الدوائر المعطاة من الخارج وتمس من الداخل البعض الآخر.

والآن لنفرض كالمعتاد أن الحل موجود ومتاح أمامنا. وهو – كما تعودنا – الدائرة S التي نصف قطرها r وتمس الدوائر الثلاث المعطاة C_1, C_2, C_2 التي مراكزها على الترتيب هي O_1, O_2, O_3 وأنصاف أقطارها هي r_1, r_2, r_3 (انظر الشكل 9–10).



شكل 9 – 10

بالأخذ في الاعتبار حل الإنشاء رقم 9 $\left(\mathrm{LCC}\right)$، نستطيع توسعة الحل (الدائرة S). وبالتركيز على الدائرة S' التي نصف قطرها $r+r_1$. ثم بتقليص الدائرة C_1 لتتحول إلى مركزها O_1، وكذلك تتحول الدائرة C_2 إلى الدائرة C_2' بنصف قطر قدره r_2-r_1، وكذلك الدائرة C_3 إلى الدائرة C_3' بنصف قطر قدره r_3-r_1. إذن؛ ستمر الدائرة S' بالنقطة O_1 وتمس الدائرتين C_2', C_3'، وهذا ما يقودنا بكل دقة نحو الإنشاء رقم 8 $\left(\mathrm{PCC}\right)$. فلدينا النقطة O_1، وبسهولة نستطيع إنشاء الدائرتين C_2', C_3'. وعليه؛ فبسهولة أيضاً نحصل على الحل (الدائرة S) وذلك بتقليص الدائرة S' والتي مركزها O ونصف قطر قدرها $OT = OO_1 - r_1$.



شكل $10-10$

والآن سنرسم حلاً آخر حيث الدائرة S تمسها الدائرة C_1 من الداخل، والدائرتان C_2, C_3 من الخارج وذلك كما يظهر في الشكل $10 - 10$. أما بخصوص الحل فإنه سيسير بصورة كبيرة على نفس النهج السابق، حيث تعتبر الدائرة S' حلاً للإنشاء (PCC)، ولكن في هذه الحالة الدائرة C_2' يكون نصف قطرها $r_2 + r_1$، و الدائرة C_3' يكون نصف قطرها $r_3 + r_1$.

وهكذا نكون قد ناقشنا جميع الحالات العشر، ولكنك - عزيزي القارئ - ستفقد الكثير من الهندسة الشيقة والمثيرة إذا لم تحاول العمل على توضيح جميع الحالات الخاصة التي تنتج من تحريك بعض العناصر المعطاة في الإنشاء حول بعضها البعض، وهذا ما ستراه في التدريبات التالية.

تدريبات

سنشير هنا إلى بعض الحالات الخاصة التي قد تكون موجودة بين المعطيات الموجودة في كل إنشاء، مع العلم أن هذه الحالات الخاصة ستقودنا حتماً إلى حلول مختلفة وإلى عدد مختلف أيضاً من الحلول.

في التدريبات $4 - 1$، ناقش الحالات الخاصة التالية في ضوء الإنشاء (PPL).

1. $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ يوازي L (حل واحد).
2. P_1 تقع على L (حل واحد).
3. P_1, P_2 كلتاهما تقع على L.
4. L يقع بين P_1, P_2.

في التدريبات $9 - 5$، ناقش بالتفصيل الحالات الخاصة التالية في ضوء الإنشاء (PPL).

5. L_1, L_2 متوازيان، و P تقع على L_1.
6. L_1, L_2 متوازيان، و P تقع بينهما.
7. L_1, L_2 متوازيان، و P تقع خارجهما.
8. L_1, L_2 يتقاطعان ، و P تقع على L_1.
9. L_1, L_2 يتقاطعان في P.

في الإنشاء (LLL ، الشكل 16 − 9). التدريبات 17 − 10 تشير لبعض التفاصيل التي يطلب منك العمل عليها بنفسك. فحاول إيجاد (وإثبات) هذه العلاقات.

10. الدائرة التي مركزها I هي الدائرة التي تسمى الدائرة الداخلية للمثلث ABC ونصف قطرها r. أما الدوائر التي مراكزها I_a, I_b, I_c ، وهي التي تسمى الدوائر الخارجية لنفس المثلث وأنصاف أقطارها r_a, r_b, r_c على الترتيب. هذه الدوائر الأربع ترتبط بعلاقة ذات صيغة رائعة هي:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

أثبت هذه العلاقة. (إرشاد : استخدم المساحات)

11. أنصاف الأقطار الأربعة التي يتحدث عنها التدريب السابق، يمكن أيضاً التعبير بطريقة أخرى عن العلاقة بينها حيث يمكن لنا مباشرة ومن خلال أطوال أضلاع المثلث وعلاقتها بنصف محيط المثلث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ، لدينا :

$$r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{(s-a)}} \qquad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-a)}{(s-c)}} \qquad r_b = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{(s-b)}}$$

أثبت الصيغ السابقة (إرشاد : المساحات وخاصة صيغة هيرون التي تنص على $\left[\Delta ABC\right]=\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$)

12. أثبت أن مقلوب نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث يساوي مجموع مقلوبات ارتفاعات نفس المثلث. أي أن

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

a.13 : أثبت أن حاصل ضرب أنصاف أقطار دوائر المثلث الأربع يساوي مربع مساحة نفس المثلث.

b : أثبت أن مجموع أنصاف أقطار الدوائر الخارجية للمثلث يساوي مجموع نصف قطر الدائرة الداخلية وأربعة أمثال طول قطر الدائرة المحيطة بالمثلث.

14. أثبت أن كل رأس من رؤوس ΔABC تقع على استقامة واحدة مع كل من مركز الدائرة الداخلية للمثلث ومركز الدائرة الخارجية المقابلة لهذه الرأس. (أي أنه على سبيل المثال أثبت أن A, I, I_a تقع على استقامة واحدة).

15. أثبت أن كل رأس من رؤوس ΔABC تقع أيضا على استقامة واحدة مع مركزي الدائرتين الخارجيتين الواقعتين بينهما. (أي أنه على سبيل المثال، أثبت أن A, I_b, I_c تقع على استقامة واحدة).

16. أثبت أن ارتفاعات $\Delta I_aI_bI_c$ هي نفسها منصفات زوايا ΔABC التي تتقاطع في نقطة مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC .

17. باستخدام النتائج التي توصلت إليها في التدريب رقم 16 أثبت أن النقاط الأربع I, I_a, I_b, I_c تشكل شكلاً رباعياً مرسوماً من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث. هذا يعني أننا إذا اخترنا من تلك النقاط الأربع أي ثلاث نقاط (تشكل مثلثاً) ورسمنا ارتفاعات هذا المثلث فإنها تتقاطع في النقطة الرابعة.

في التدريبات 18,19 أثبت العلاقات التالية في ضوء الإنشاء (PPC).

18. كما هو مبين في الشكل الخاص بالإنشاء المذكور، إذا تقاطع كل من $\overleftrightarrow{P_1P_2}, \overleftrightarrow{QR}$ في النقطة A ، $AP_1 \cdot AP_2 = AR \cdot AQ$ ، فأثبت أن النقاط P_1, P_2, R, Q تشكل شكلاً رباعياً دائرياً. (إرشاد: احصل على تناسب من المعادلة، ثم أثبت أن هناك زوجاً من المثلثات المتشابهة، ثم أوجد زاويتين متكاملتين، ثم استخدم الحقيقة التي تقول إن الشكل الرباعي يكون دائرياً إذا وفقط إذا كان به زاويتان متقابلتان متكاملتان).
19. أثبت أنه إذا تماست دائرتان من الخارج، فإن خط المركزين لهما يمر بنقطة تماس الدائرتين.

ناقش كلاً من الحالات الخاصة في التدريبات $31 - 20$. وأثبتها في ضوء الإنشاء (LLC) والشكل الموضح له.

20. L_1, L_2 متوازيان، ويمسان الدائرة C معاً.
21. L_1, L_2 متوازيان، ويقطعان الدائرة C معاً.
22. L_1, L_2 متوازيان، و L_1 يقطع الدائرة C ، و L_2 يوازيها.
23. L_1, L_2 متوازيان، و L_1 يقطع الدائرة C ، و L_2 لا يقطعها.
24. L_1, L_2 متوازيان، و الدائرة C تقع بينهما وتمس L_1 ، ولا تمس L_2.
25. L_1, L_2 متوازيان، و الدائرة C تقع بينهما ولا تمسهما.
26. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K التي تقع داخل الدائرة C.
27. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K التي تقع على الدائرة C.
28. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K ، و L_1 يمس الدائرة C عند النقطة K.
29. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K التي تقع خارج الدائرة C التي بدورها تمس كلاً من L_1, L_2.

30. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K التي تقع خارج الدائرة C التي تمس بدورها L_1 ، وتقطع L_2.

31. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K التي تقع خارج الدائرة C التي يقطعها كل من L_1, L_2.

ناقش كلاً من الحالات الخاصة في التدريبات $39 - 32$ ، وأثبتها في ضوء الإنشاء (LCC) والشكل الموضح له.

32. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) و L يقطع كلاً منهما.

33. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) و L يمس الدائرة C_1.

34. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) و L يقطع فقط C_2 ، ولا يقطع C_1.

35. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) و L يمس الدائرة C_2.

36. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) و L لا يقطع أياً منهما.

37. C_1 تمس داخلياً C_2 عند النقطة T. ناقش طبيعة وعدد حلول كل وضع من أوضاع المستقيم L بالنسبة للدائرتين C_1, C_2 كما يظهر في التدريبات $32 - 36$.

38. C_1 ، C_2 تتقاطعان عند النقطة P, Q. ناقش طبيعة وعدد حلول كل وضع من أوضاع المستقيم L بالنسبة للدائرتين C_1, C_2 كما يظهر في التدريبات $32 - 36$.

39. C_1 تمس خارجياً C_2 عند النقطة T. ناقش طبيعة وعدد حلول كل وضع من أوضاع المستقيم L بالنسبة للدائرتين C_1, C_2 كما يظهر في التدريبات $32 - 36$.

في كل حالة من التدريبات 59 – 40 ، ارسم الشكل وناقش وقم بإنشاء الحل وذلك في ضوء الإنشاء (CCC).

40. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والتي تقع بدورها أيضاً داخل الدائرة C_3 (دون تماس)

41. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والتي تتماس داخلياً مع الدائرة C_3.

42. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) وكلتاهما تتقاطع مع الدائرة C_3.

43. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تتقاطع مع الدائرة C_2 ولا تتقاطع مع C_1.

44. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تتقاطع مع الدائرة C_2 وتمس الدائرة C_1.

45. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تمس كلتا الدائرتين C_1, C_2.

46. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تتقاطع مع الدائرة C_1 ولا تتقاطع مع C_2.

47. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تتماس خارجياً مع الدائرة C_2.

48. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تقع أيضاً داخل الدائرة C_2 (دون تماس) ولكن تقع خارج C_1.

49. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تقع أيضاً داخل الدائرة C_2 (دون تماس) والدائرتان C_1, C_3 تتماسان من الخارج.

50. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تمس الدائرتين C_1, C_2 عند النقطة T_1 (أربع حالات).

51. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تمس الدائرتين C_1, C_2 ولكن ليس عند النقطة T_1.

52. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تقطع الدائرتين C_1, C_2 عند النقطة T_1 فضلاً عن نقاط أخرى.

53. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تقطع الدائرتين C_1, C_2 ولكن ليس عند النقطة T_1.

54. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_2 هي الأخرى تتماس داخلياً مع الدائرة C_3 عند النقطة T_2.

55. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 هي الأخرى تتماس داخلياً مع الدائرة C_2 ولكن ليس عند النقطة T_1 وتقطع الدائرة C_1.

56. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تمس الدائرة C_1 وتقطع الدائرة C_2.

57. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تتماس خارجياً مع الدائرة C_2 عند النقطة T_2.

58. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تقع خارج كلتا الدائرتين C_1, C_2.

59. C_1 تتقاطع مع C_2 عند النقطتين P, Q. ناقش الحالات الممكنة لوضع الدائرة C_3 بالنسبة لكل من الدائرتين المعطاتين والحلول المترتبة على ذلك.

الفصل الحادي عشر

النسبة الذهبية وأعداد فيبوناتشي

النسبة الذهبية Golden Ratio

إن رحلتنا في غمار الهندسة الإقليدية كانت في أغلبها ذات طبيعة هندسية، ولكن تظل لدينا تلك الحلقات التي تربط بين الهندسة وبعض فروع الرياضيات الأخرى. ولقد رأينا أن تكون مناقشتنا الأخيرة في الفصل الأخير من خلال عرض بعض الأمثلة لتلك العلاقات التي تربط بين الهندسة الإقليدية وبين تلك الفروع. ففي هذا الفصل سوف نرى بعض العلاقات المذهلة بين النسبة الذهبية وأعداد فيبوناتشي Fibonacci numbers. والتي سنكشف عنها النقاب خلال دراستنا لهذه الموضوعات.

وسنبدأ بالطبع بتعريف المقصود بالنسبة الذهبية التي تساوي $\frac{a}{b} \approx 1.61803398874987......$، ولعلك للوهلة الأولى تظن أنه لا يوجد شيء غير عادي في هذه النسبة، ولكنك بعد قليل ستكتشف لأي مدى تكون هذه النسبة مثيرة للاهتمام، فستجد على سبيل المثال أن $\frac{b}{a} \approx 0.61803398874987......$، وستلاحظ حتماً أن $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} + 1$، وهذا بغير شك شيء غير عادي، ولذا – عزيزي

القارئ – إن كنت تريد أن تستوعب الأمر جيداً فعليك أن تقرأ وتدع نفسك تستمع بسلسلة من أغرب العلاقات الرياضية.

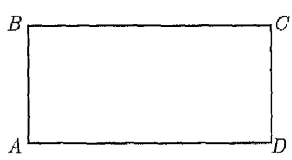
شكل $11-1$

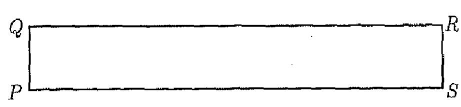
وللتوضيح بشكل آخر لتكن لدينا النقطة P واقعة على $\overline{AB}$ بحيث $\frac{AP}{PB}=\frac{AB}{AP}$ (انظر الشكل $11-1$). عندها نستطيع أن نقول إن النقطة P تقسم $\overline{AB}$ بنسبة معينة هي النسبة الذهبية.

ولكن ربما يظل السؤال قائما ، لماذا هذه النسبة المشار إليها تحمل شيئاً مميزاً يجعلها نسبة ذهبية؟

وللإجابة عن هذا السؤال دعونا ننشئ مستطيلاً بحيث طوله وعرضه هما القطعتان المستقيمتان $\overline{AP}=l,\overline{BP}=w$. يشار إلى أن شكل هذا المستطيل هو الأكثر إرضاء عند النظر إليه ، فعبر العصور ارتبط هذا المستطيل بالجمال.

والآن– في رأيك– أي المستطيلين الموضحين في الشكلين $11-2,11-3$ يريح النظر أكثر عند النظر إليه؟



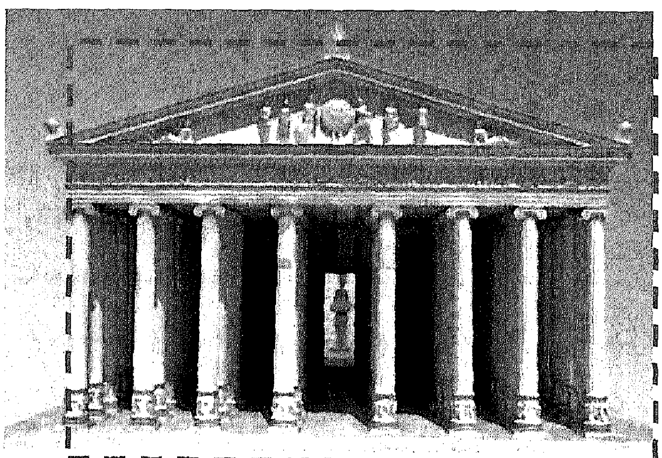


شكل $11-2$

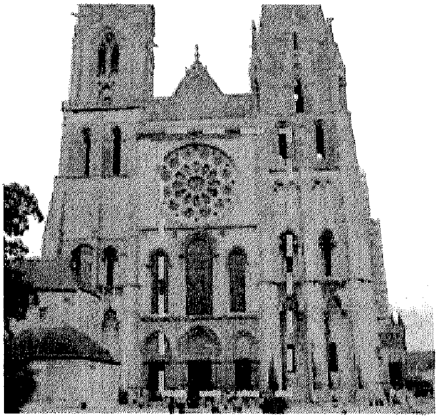
شكل $11-3$

ووفقا لعلماء النفس الذين لديهم تجارب مع هذه المسألة من أمثال جوستاف فيشنر، إدوارد لي ثورندايك (Gustav Fechner & Edward Lee Thorndike, 1917) فالمستطيل في الشكل 2 – 11 هو الأكثر إراحة عند النظر إليه، كما أشاروا إلى أن الذي ينظر نحو المستطيلين سوف يلمح المستطيل $ABCD$ دفعة واحدة، بينما عند النظر نحو المستطيل $PQRS$ (الشكل 3 – 11) فإن ذلك يتطلب حركة أفقية للعين من قبل معظم الناس.

وجمال هذا المستطيل، يطلق عليه اسم المستطيل الذهبي Golden rectangle، وهذا المستطيل لم يتم اكتشافه حديثاً فقد كانت الحضارات القديمة على دراية تامة به. فعلى سبيل المثال، في الفنون المعمارية القديمة سنجد هذا المستطيل حاضراً بقوة في المنشآت والمباني الشهيرة، فنراه في معبد البراثينون في أثينا باليونان (الشكل 4 – 11) وأبواب كاتدرائية شارترز في فرنسا (الشكل 5 – 11). كما يوجد الكثير من الأمثلة لمثل هذه المستطيلات من حولنا – حاول أن تجد بعضها.



شكل 4 – 11



شكل $5-11$

المستطيل الذهبي طوله وعرضه يحققان النسبة الذهبية أي أن: $\frac{w}{l}=\frac{l}{w+l}$.

والآن كيف لنا أن ننشئ المستطيل الذهبي ؟ ربما يكون من أسهل الطرق لهذا الإنشاء أن نبدأ بالمربع $ABEF$ (انظر الشكل $6-11$)، حيث M منتصف $\overline{AF}$ ، ثم نرسم الدائرة التي فيها مركزها M ونصف قطرها $\overline{ME}$ وتقطع $\overrightarrow{AF}$ في النقطة D ، ثم نقيم عموداً من D ليقطع $\overrightarrow{BE}$ في C ، وعليه يكون لدينا المستطيل $ABCD$ الذي هو في واقع الأمر المستطيل الذهبي.

والآن دعونا دون أن نفقد العمومية نعتبر المربع طول ضلعه الوحدة، أي أن $EF=AF=1$ وكذلك $MF=\frac{1}{2}$ ، وباستخدام نظرية فيثاغورس نحصل على $ME=\frac{\sqrt{5}}{2}$. ومن ذلك نستنتج أيضاً أن $AD=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ، وللتحقق من أن المستطيل $ABCD$ مستطيلاً ذهبياً علينا أن نثبت أن:

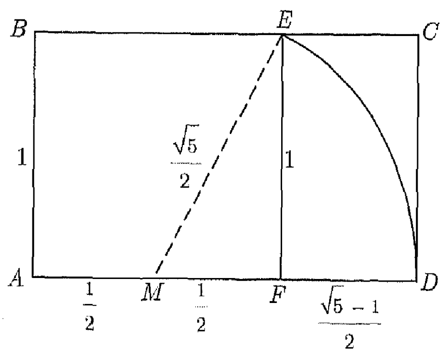
$$\frac{w}{l} = \frac{l}{w+l} \quad \text{أو} \quad \frac{CD}{AD} = \frac{AD}{CD+AD}$$

بالتعويض بالقيم التي أوجدناها نحصل على المتساوية الصحيحة التالية :

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

عادة ما نستخدم الحرف الأبجدي اللاتيني ϕ للتعبير عن النسبة الذهبية. ونستطيع الحصول على القيمة التقريبية لها عن طريق العلاقة :

$$\phi = \frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803398874987483...$$



شكل 6 – 11

ولعلك قبل ذلك اتفقت معنا على أن هذا العدد (ϕ) مميز جداً. فمقلوبة $\frac{1}{\phi}$:

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 0.61803398874987483...$$

ولذا ليس فقط $\phi \cdot \frac{1}{\phi} = 1$ ، ولكن أيضاً $\phi - \frac{1}{\phi} = 1$ ، كما أن $\phi, \frac{1}{\phi}$ جذرا المعادلة التربيعية $x^2 - x - 1 = 0$ ، وسوف نناقش هذه الميزة لاحقاً.

ولعل من الشيق أيضاً أن ندرس قوى ϕ ، وبالطبع أولاً سنبدأ بإيجاد قيمة ϕ^2 بدلالة ϕ كما يلي :

$$\phi^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \phi + 1$$

أما باقي القوى فيمكن استنتاجها كالتالي :

$$\begin{aligned}
\phi^3 &= \phi \cdot \phi^2 = \phi\left(\phi + 1\right) = \phi^2 + \phi = \left(\phi + 1\right) + \phi = 2\phi + 1 \\
\phi^4 &= \phi^2 \cdot \phi^2 = \left(\phi + 1\right)\left(\phi + 1\right) = \phi^2 + 2\phi + 1 = \left(\phi + 1\right) + 2\phi + 1 \\
&= 3\phi + 2 \\
\phi^5 &= \phi^3 \cdot \phi^2 = \left(2\phi + 1\right)\left(\phi + 1\right) = 2\phi^2 + 3\phi + 1 = 2\left(\phi + 1\right) + 3\phi + 1 \\
&= 5\phi + 3 \\
\phi^6 &= \phi^3 \cdot \phi^3 = \left(2\phi + 1\right)\left(2\phi + 1\right) = 4\phi^2 + 4\phi + 1 = 4\left(\phi + 1\right) + 4\phi + 1 \\
&= 8\phi + 5 \\
\phi^7 &= \phi^4 \cdot \phi^3 = \left(3\phi + 2\right)\left(2\phi + 1\right) = 6\phi^2 + 7\phi + 2 = 6\left(\phi + 1\right) + 7\phi + 2 \\
&= 13\phi + 8
\end{aligned}$$

ويمكننا تلخيص ذلك في الشكل (الشكل $7 - 11$)، التالي :

$$\begin{aligned}
\phi &= 1\phi + 0 \\
\phi^2 &= 1\phi + 1 \\
\phi^3 &= 2\phi + 1 \\
\phi^4 &= 3\phi + 2 \\
\phi^5 &= 5\phi + 3 \\
\phi^6 &= 8\phi + 5 \\
\phi^7 &= 13\phi + 8 \\
\phi^8 &= 21\phi + 13 \\
\phi^9 &= 34\phi + 21 \\
\phi^{10} &= 55\phi + 34
\end{aligned}$$

.

.

شكل $7 - 11$

لاحظ أنه يبدو أن هناك صلة بين المعاملات والثوابت. وفي واقع الأمر فهي تشكل نمطاً سيصبح مألوفاً لك قريباً . وربما تكون هذه الأرقام أساسا لحلقة الوصل بين العديد من فروع الرياضيات (بما فيها الهندسة). وقبل أن نكمل دراسة النسبة الذهبية في الهندسة سوف نستطرد قليلاً في دراسة هذه الأعداد ولكن بعناية أكثر.

أعداد فيبوناتشي Fibonacci numbers

إن منشأ هذه السلسلة من الأعداد أمر مثير للاهتمام. فقد ظهرت لأول مرة كحل لمسألة مطروحة في إحدى كتب الجبر، والذي نشر في العام 1202 وكان يحمل عنوان " Liber abaci والذي كتبه ليوناردو بيزا Leonardo of Pisa الذي عرف بعد ذلك باسم فيبوناتشي $(1180-1250)$ Fibonacci * .

ولتوضيح هذه المسألة دعونا نضرب مثال سنسميه توالد الأرانب وهو كالتالي :

* فيبوناتشي لم يكن رجل دين كما كان يعتقد بعض العلماء سابقاً بل كان يعمل في التجارة ويسافر كثيراً لجميع أنحاء العالم الإسلامي، وقد استغل ذلك في قراءة كل ما يستطيع مما كتبه الرياضيين العرب. وكان أول من قدم لأوربا الأرقام العربية والهندية في كتابه الشهير Liber abaci عام 1202 والمنقح في عام 1228 ، والذي تم توزيعه أول مرة على نطاق واسع في شكل مخطوطة نشرت لأول مرة في عام 1857 في كتابات ليوناردو بيسانو Scritti di leonardo pisano.

والكتاب هو عبارة عن مجموعة من الأعمال الرياضية بما في ذلك المعادلات الخطية والتربيعية والجذور التربيعية والتكعيبية وكثيراً من الموضوعات الجديدة (من وجهة النظر الأوربية). وقد بدأ الكتاب بالعبارة " هذه هي الأشكال التسعة للأرقام الهندية 9 8 7 6 5 4 3 2 1. وبهذه الأشكال التسعة مع الرمز 0 والذي يدعوه العرب صفر، يمكن كتابة أي عدد، كما سيوضح لاحقاً " ومع هذه اللحظة تم إدخال النظام العشري لأوروبا. (ملاحظة : الكلمة العربية " صفر" هي كلمة من أصل سنسكريتي وقد استخدمت في القرن الخامس الميلادي في الهند لتشير للفراغ).

كم عدد أزواج الأرانب التي يتم إنتاجها في عام واحد وذلك من خلال زوج واحد فقط، إذا كان كل زوج ينتج زوجاً ثانياً في كل شهر، وعليه كم من الأرانب المنتجة عند الشهر الثاني ؟

من هذه المسألة ظهرت متسلسلة فيبوناتشي الشهيرة. فإذا فرضنا أن زوج الأرانب الصغيرة (الحديثة الولادة) (B) تكبر وتصبح زوجاً منتجاً (A) خلال شهر واحد، وبعد ذلك يمكننا إعداد مخطط كما بالشكل $8-11$. وفيه عدد الأزواج الكبيرة التي تعيش كل شهر هي التي تعين متسلسلة فيبوناتشي (العمود الثالث):

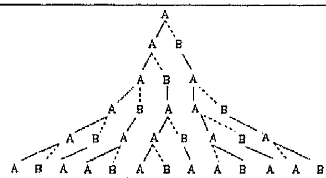
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

فإذا فرضنا أن f_n الحد النوني لمتسلسلة فيبوناتشي ؛ إذن :

$$\begin{aligned}
f_1 &= 1 \\
f_2 &= 1 \\
f_3 &= f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2 \\
f_4 &= f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3 \\
f_5 &= f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5 \\
&\;\;\vdots \\
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}
\end{aligned}$$

حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 3.

ولعلك تلاحظ أن كل حد بعد الحدين الأوليين هو مجموع الحدين السابقين له.

مجموع الأزواج	عدد الأزواج الصغيرة B	عدد الأزواج البالغة A	الأزواج	الشهر
1	0	1		يناير 1
2	1	1		فبراير 1
3	1	2		مارس 1
5	2	3		أبريل 1
8	3	5		مايو 1
13	5	8		يونيو 1
21	8	13		يوليو 1
34	13	21		أغسطس 1
55	21	34		سبتمبر 1
89	34	55		أكتوبر 1
144	55	89		نوفمبر 1
233	89	144		ديسمبر 1
377	144	233		يناير 1

شكل 8 – 11

مثال

باستخدام قاعدة متسلسلة فيبوناتشي، أوجد الأعداد العشرة التي تسبق العدد الأول 1 إذا سمحنا للأعداد غير الموجبة n.

الحل

لأن $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ ؛ إذن: $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$ وعليه تكون الأعداد العشرة هي:

$$
\begin{aligned}
f_o &= f_2 - f_1 = 1 - 1 = 0 \\
f_{-1} &= f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1 \\
f_{-2} &= f_0 - f_{-1} = 0 - 1 = -1 \\
f_{-3} &= f_{-1} - f_{-2} = 1 - (-1) = 2 \\
f_{-4} &= f_{-2} - f_{-3} = -1 - 2 = -3 \\
f_{-5} &= f_{-3} - f_{-4} = 2 - (-3) = 5 \\
f_{-6} &= f_{-4} - f_{-5} = -3 - 5 = -8 \\
f_{-7} &= f_{-5} - f_{-6} = 5 - (-8) = 13 \\
f_{-8} &= f_{-6} - f_{-7} = -8 - 13 = -21 \\
f_{-9} &= f_{-7} + f_{-8} = 13 - (-21) = 34
\end{aligned}
$$
●

في المثال السابق والذي تم استنتاج حله. يكون من المفيد في كثير من الأحيان أن يتم حله عن طريق الاستنتاج الاستقرائي من العلاقات وذلك كما في المثال التالي.

مثال

أوجد مجموع أول حدين، ثلاثة حدود، أربعة حدود، خمسة حدود، ...، تسعة حدود، عشرة حدود، من متسلسلة فيبوناتشي. ثم عمم النمط لتحصل على مجموع أول n من الحدود.

الحل

سنأخذ علاقة المجموع التالية $\sum_{m=1}^{n} f_m$ ، وبسهولة يمكننا تكوين الأعمدة الثلاثة الأولى من الجدول الموضح في الشكل $9 - 11$. وبالتالي يكون لدينا مجموع أول عددين من أعداد فيبوناتشي

$\sum_{m=1}^{2} f_m = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2$ ، ويأتي مجموع أول ثلاثة أعداد بطريقة مشابهة

$\sum_{m=1}^{3} f_m = f_1 + f_2 + f_3 = 1 + 1 + 2 = 4$ ، وهكذا نستطيع أن نكمل. ●

m	f_m	$\sum_{m=1}^{n} f_m$	$\sum_{m=1}^{n} f_{2m-1}$	$\sum_{m=1}^{n} f_{2m}$	f_m^2	$\sum_{m=1}^{n} f_m^2$
1	1	1	1		1	1
2	1	2		1	1	2
3	2	4	3		4	6
4	3	7		4	9	15
5	5	12	8		25	40
6	8	20		12	64	104
7	13	33	21		169	273
8	21	54		33	441	714
9	34	88	55		1,156	1,870
10	55	143		88	3,025	4,895
11	89	232	144		7,921	12,816
12	144	376		232	20,736	33,552
13	233	609	377		54,289	87,841
14	377	986		609	142,129	229,970
15	610	1,596	987		372,100	602,070
16	987	2,583		1,596	974,169	1,576,239
17	1,597	4,180	2,584		2,550,409	4,126,648
18	2,584	6,764		4,180	6,677,056	

شكل 9 – 11

واضح أن كل حد في العمود الخاص بالمجاميع $\sum_{m=1}^{n} f_m$ أقل بواحد من أعداد فيبوناتشي ، وبشكل أكثر تحديداً، $\sum_{m=1}^{n} f_m = f_{n+2} - 1$ ، وهو مجموع أول n حداً من أعداد فيبوناتشي الذي يكون أقل بواحد من الحد رقم $(n+2)$ من أعداد فيبوناتشي ، وسنقدم هذه الملاحظة في نظرية $1 - 11$.

نظرية: 1-11 $\sum_{m=1}^{n} f_m = f_{n+2} - 1$

البرهان

من تعريف أعداد فيبوناتشي لدينا $f_1 + f_2 = f_3$. إذن،

$$\begin{aligned}
f_1 &= \cancel{f_3} - f_2 \\
f_2 &= \cancel{f_4} - \cancel{f_3} \\
f_3 &= \cancel{f_5} - \cancel{f_4} \\
f_4 &= \cancel{f_6} - \cancel{f_5} \\
&\;\;\vdots \\
f_{n-1} &= \cancel{f_{n+1}} - \cancel{f_n} \\
f_n &= f_{n+2} - \cancel{f_{n+1}}
\end{aligned}$$

بالجمع : $\sum_{m=1}^{n} f_m = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1.$

باعتبار الحدود الفردية من متتابعة فيبوناتشي. الشكل $9 - 11$ سيساعدنا في إيجاد نمط مجموع هذه الحدود :

$$f_1+f_3+f_5+f_7+\ldots\ldots+f_{2m-1}=1+2+3+5+13+\ldots\ldots+f_{2m-1}$$

والآن ربما تتوقع النظرية التالية.

نظرية: 11-2

$$\sum_{m=1}^{n} f_{2m-1}=f_{2n}$$

البرهان

$$\begin{aligned}
f_1 &= \cancel{f_2}\\
f_3 &= \cancel{f_4}-\cancel{f_2}\\
f_5 &= \cancel{f_6}-\cancel{f_4}\\
f_7 &= \cancel{f_8}-\cancel{f_6}\\
&\;\;.\\
&\;\;.\\
f_{2n-3} &= \cancel{f_{2n-2}}-\cancel{f_{2n-4}}\\
f_{2n-1} &= f_{2n}-\cancel{f_{2n-2}}
\end{aligned}$$

بالجمع : $\sum_{m=1}^{n} f_{2m-1}=f_{2n}$.●

علمنا تواً من النظرية $1-11$ أن :

$$\sum_{m=1}^{n} f_m=f_{n+2}-1 \qquad (\mathrm{I})$$

إذا ضاعفنا عدد الحدود في (I) سنحصل على :

$$\sum_{m=1}^{2n} f_m=f_{2n+2}-1 \qquad (\mathrm{II})$$

والآن لنفرض أننا طرحنا جميع الحدود ذات الترتيب الفردي من (II) سوف يتبقى لنا الحدود ذات الترتيب الزوجي والتي هي :

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} f_{2m} &= \sum_{m=1}^{2n} f_m - \sum_{m=1}^{n} f_{2m-1}\\ &= f_{2n+2} - 1 - f_{2n}\\ &= f_{2n+1} - 1 \qquad \left(f_{2n} = f_{2n+2} - f_{2n-1}\right)\end{aligned}$$

تلك النتيجة تثبت النظرية التالية.

نظرية 3-11

$$\sum_{m=1}^{n} f_{2m} = f_{2n+1} - 1$$

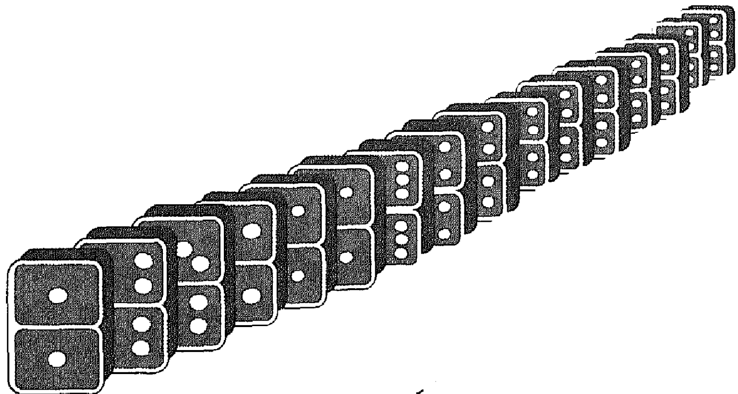
بالبحث في عمود f_m^2 في الجدول الموضح بالشكل $9-11$ سنكتشف العلاقة بين أعداد فيبوناتشي ومربعاتها، وهذه العلاقة هي محتوى نظريتنا التالية.

نظرية 4-11

$$f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = \left(-1\right)^{n-1}$$

قبل أن نقوم بإثبات هذه النظرية، سنناقش برهاناً من نوع مختلف، باستخدام الاستقراء الرياضي mathematical induction. ليكن لدينا مجموعة ذات عدد غير منته من قطع الدومينو تم وضعها كما بالشكل $10-11$. والآن، إذا طلب منا أن نسقط جميع هذه القطع، فلدينا طريقتان لفعل ذلك: (1) أن نسقط كل قطعة على حدة بشكل منفصل. أو (2) أن نسقط فقط أول قطعة إذا كنا متأكدين أن كل قطعة عندما تسقط ستسقط القطعة التي تليها تلقائياً.

الطريقة الأولى ليست فقط غير فعالة، ولكنها أيضاً لا تجعلنا متأكدين من سقوط جميع القطع (لأن الحدود قد تكون غير منتهية). أما الطريقة الثانية فتضمن لنا سقوط جميع القطع. بعد أن تسقط القطعة الأولى، والتي بدورها ستسقط الثانية ثم الثالثة فالرابعة وهكذا، وبالتالي حتماً ستسقط جميع القطع. والطريقة الثانية مماثلة تماما لمسلمة الاستقراء الرياضي:



شكل $10-11$

العبارة المتضمنة العدد الطبيعي n تكون صحيحة لكل الأعداد الطبيعية عندما

(a) تكون صحيحة عند $n=1$.

(b) صحتها عند $n=k$ تؤدي إلى صحتها عند $n=k+1$.

الآن سنستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات النظرية $4-11$.

البرهان

عندما $n=1$ ، يكون لدينا :

$$f_n^2 = f_{n-1}\cdot f_{n+1} = f_1^2 = f_0\cdot f_2 = 1-(0)(1) = 1 = (-1)^{1-1}$$

($f_0 = 0$ حسبما وضحناه في المثال الأول).

نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ ، أي نفرض أن

$$f_k^2 - f_{k-1}\cdot f_{k+1} = (-1)^{k-1}$$

والآن سنحاول إثبات صحة العلاقة عند $n=k+1$:

$$f_{k+1}^2 - f_k\cdot f_{k+2} = (-1)^k$$

لأن $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$. إذن ؛

$$\begin{aligned} f_{k+1}^2 - f_k \cdot f_{k+2} &= f_{k+1}^2 - f_k\left(f_k + f_{k+1}\right) \\ &= f_{k+1}^2 - f_k^2 - f_k \cdot f_{k+1} \\ &= f_{k+1}\left(f_{k+1} - f_k\right) - f_k^2 \\ &= f_{k+1} \cdot f_{k-1} - f_k^2 \\ &= -\left(-1\right)^{k-1} \\ &= \left(-1\right)^k \end{aligned}$$

وهكذا يكون قد تم برهان النظرية. ●

من الشكل 9 – 11 يمكننا توقع أن النتيجة التالية.

نظرية: 5-11 $f_n \cdot f_{n+1} - f_{n-1} \cdot f_n = f_n^{\,2}$

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي ، عندما $n = 1$ لدينا

$.f_1 \cdot f_2 - f_0 \cdot f_1 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1^2 = f_1^{\,2}$

إذن العبارة صحيحة من أجل $n = 1$. لنفرض صحة العبارة من أجل $n = k$ أي أن

$f_k \cdot f_{k+1} - f_{k-1} \cdot f_k = f_k^{\,2}$. الآن نريد إثبات صحة $f_{k+1} \cdot f_{k+2} - f_k \cdot f_{k+1} = f_{k+1}^{\ \ 2}$.

$$f_{k+1} \cdot f_{k+2} - f_k \cdot f_{k+1} = f_{k+1}(f_{k+2} - f_k) = f_{k+1} \cdot f_{k+1} = f_{k+1}^2$$

وهذا يبرهن النظرية.●*

---

* لا داعي للاستقراء في هذا البرهان، بل مباشرة من التعريف يمكن الإثبات كما يلي :

$f_n \cdot f_{n+1} - f_{n-1} \cdot f_n = f_n(f_{n+1} - f_{n-1}) = f_n \cdot f_n = f_n^{\,2}$ (المترجم).

المقدار $\sum_{m=1}^{n} f_m^2$ في الشكل $11-9$ يوحي بعلاقة شيقة وهي أن كل مجموع يساوي حاصل ضرب عدد فيبوناتشي المناظر لعدد حدود المجموع في عدد فيبوناتشي الذي يليه. وهذا ما تصوغه النظرية التالية.

نظرية: 6-11

$$\sum_{m=1}^{n} f_m^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

البرهان

من النظرية $11-5$ لدينا:

$$f_m^2 = f_m \cdot f_{m+1} - f_{m-1} \cdot f_m$$

إذن:

$$\begin{aligned}
f_1^2 &= f_1 \cdot f_2 - f_o \cdot f_1 = \cancel{f_1 f_2} \qquad (f_o = 0)\\
f_2^2 &= \cancel{f_2 f_3} - \cancel{f_1 f_2}\\
f_3^2 &= \cancel{f_3 f_4} - \cancel{f_2 f_3}\\
&\ \ \vdots\\
f_{n-1}^2 &= \cancel{f_{n-1} \cdot f_n} - \cancel{f_{n-2} \cdot f_{n-1}}\\
f_n^2 &= f_n \cdot f_{n+1} - \cancel{f_{n-1} \cdot f_n}
\end{aligned}$$

بالجمع $\sum_{m=1}^{n} f_m^2 = f_n \cdot f_{n+1}$. ●

هناك العديد من العلاقات الرائعة التي تحوي أعداد فيبوناتشي ، نأمل بأن تتمكن من برهان بعضها ضمن التدريبات الموجودة في نهاية الفصل.

أعداد لوكاس Lucas numbers

في العام ١٨٧٧ سميت أعداد فيبوناتشي بهذا الاسم بواسطة الرياضي الفرنسي فرانسوا - إدوارد- أناتول لوكاس (١٨٤٢-١٨٩١) Francois-Edouard-Anatole Lucas. وفي نفس الوقت قدم متسلسلة جديدة من الأعداد تعتمد بشكل كبير على متسلسلة فيبوناتشي إلا أنها تبدأ بالعددين $1,3$ بدلاً من $1,1$ ، أي أن المتسلسلة الجديدة هي : $1,3,4,7,11,...$. وهذه المتسلسلة الآن تحمل اسم متسلسلة لوكاس. وهي بالتفصيل تظهر في الشكل $11-11$.

m	l_m	$\sum_{m=1}^{n} l_m$	$\sum_{m=1}^{n} l_{2m-1}$	$\sum_{m=1}^{n} l_{2m}$	l_m^2	$\sum_{m=1}^{n} l_m^2$
1	1	1	1		1	1
2	3	4		3	9	10
3	4	8	5		16	26
4	7	15		10	49	75
5	11	26	16		121	196
6	18	44		28	324	520
7	29	73	45		841	1,361
8	47	120		75	2,209	3,570
9	76	196	121		5,776	9,346
10	123	319		198	15,129	24,475
11	199	518	320		39,601	64,076
12	322	840		520	103,634	167,760

13	521	1,361	841		271,441	439,201
14	843	2,204		1,363	710,649	1,149,850
15	1,364	3,568	2,205		1,860,496	3,010,346
16	2,207	5,775		3,570	4,870,849	7,881,195
17	3,571	9,346	5,776		12,752,041	20,633,236
..	5,778	15,124		3,348	33,385,284	54,018,520

شكل 11 – 11

وكما في حالة أعداد فيبوناتشي، يوجد العديد من العلاقات الشيقة التي يمكن اكتشافها من الجدول السابق، وسوف نقدم في الصفحات التالية بعضاً من تلك العلاقات في صورة نظريات.

نظرية: 11-7

$$\sum_{m=1}^{n} l_m = l_{n+2} - 3$$

البرهان

سوف نستخدم الاستقراء الرياضي كبديل للطريقة التي استخدمناها في برهان نظرية 1 – 11.

عند $n=1$:

$$\sum_{m=1}^{1} l_m = l_{1+2} - 3 = l_3 - 3 = 4 - 3 = 1$$

نفرض صحة العلاقة عند $n=k$:

$$\sum_{m=1}^{k} l_m = l_{k+2} - 3$$

والآن سنحاول إثبات صحة العلاقة عند $n=k+1$:

$$\sum_{m=1}^{k+1} l_m = l_{(k+1)+2} - 3 = l_{k+3} - 3$$

ومن الفرض يمكننا كتابة العلاقة :

$$\sum_{m=1}^{k} l_m + l_{k+1} = l_{k+2} - 3 + l_{k+1}$$

ولكن :

$$l_{k+1} + l_{k+2} = l_{k+3}$$

إذن :

$$\sum_{m=1}^{k+1} l_m = l_{k+3} - 3$$

وهكذا نكون قد أثبتنا النظرية. ●

النظرية التالية لأعداد لوكاس تماثل النظرية $2-11$.

نظرية 8-11 :

$$\sum_{m=1}^{n} l_{2m-1} = l_{2n} - 2$$

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي.

عند $n = 1$:

$$\sum_{m=1}^{1} l_{2m-1} = l_{2(1)} - 2 = 3 - 2 = 1$$

نفرض صحة العلاقة عند $n = k$:

$$\sum_{m=1}^{k} l_{2m-1} = l_{2k} - 2$$

والآن سنحاول إثبات صحة العلاقة عند $n = k + 1$:

$$\sum_{m=1}^{k+1} l_{2m-1} = l_{2(k+1)} - 2 = l_{2k+2} - 2$$

ومن الفرض يمكننا كتابة العلاقة :

$$\sum_{m=1}^{k} l_{2m-1} + l_{2(k+1)-1} = l_{2k} - 2 + l_{2(k+1)-1}$$

إذن :

$$\sum_{m=1}^{k} l_{2m-1} = l_{2k} + l_{2k+1} - 2 = l_{2k+2} - 2$$

وهكذا نكون قد أثبتنا النظرية. ●

لأننا قد حصلنا على مجموع أول n حداً من أعداد لوكاس في نظرية $7 - 11$ ، ومجموع أول n حداً فردياً من أعداد لوكاس في نظرية $8 - 11$ ، فإنه سيكون من السهولة الحصول على مجموع أول n حداً زوجياً من أعداد لوكاس، وللوصول إلى ذلك ، سوف نستخدم نفس الطريقة التي استخدمناها مع أعداد فيبوناتشي.

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} l_{2m} &= \sum_{m=1}^{2n} l_m - \sum_{m=1}^{n} l_{2m-1} \\ &= l_{2n+2} - 3 - \left(l_{2n} - 2\right) \\ &= l_{2n+2} - l_{2n} - 3 + 2 \\ &= l_{2n+1} - 1\end{aligned}$$

وهذا يعطينا النظرية التالية والتي يمكن برهانها باستخدام الاستقراء وسنتركها لتحل ضمن التدريبات.

نظرية 11-9

$$\sum_{m=1}^{n} l_{2m} = l_{2n+1} - 1$$

إن مجموع مربعات حدود متسلسلة لوكاس تقدم لنا نمطاً شيقاً، فكما يتضح من الشكل $11-11$، فالعمود الخاص بالمجاميع $\sum_{m=1}^{n} l_m^2$ يقل باثنين عن حاصل ضرب عدد لوكاس الموجود في نفس الصف بالذي يليه من عمود l_m، وهذا يصل بنا إلى النظرية التالية التي نترك برهانها أيضاً للتدريبات.

نظرية 11-10

$$\sum_{m=1}^{n} l_m^2 = l_n \cdot l_{n+1} - 2$$

حتى هذه النقطة، نلاحظ أن متسلسلة لوكاس ظهرت كمتسلسلة مناظرة لمتسلسلة فيبوناتشي، ولكن توجد ميزة رائعة لمتسلسلة لوكاس هي أن لها علاقة تبادلية مع متسلسلة فيبوناتشي. فبدراسة الجدولين الواردين في الشكلين $11-9, 11-11$ معاً سنكتشف على سبيل المثال:

$$f_4 \cdot l_4 = 3 \cdot 7 = 21 = f_8$$
$$f_5 \cdot l_5 = 5 \cdot 11 = 55 = f_{10}$$
$$f_6 \cdot l_6 = 8 \cdot 18 = 144 = f_{12}$$

كما يمكننا أن نستنتج أيضاً أن

$$f_n \cdot l_n = f_{2n} \qquad (n \geq 1) \qquad (\mathrm{I})$$

علاقات أخرى شيقة بين أعداد لوكاس فيبوناتشي يمكن الوصول إليها، مثل:

$$
\begin{aligned}
l_n &= f_{n-1} + f_{n+1} && (n \geq 1) && (\mathrm{II}) \\
5f_n &= l_{n-1} + l_{n+1} && (n \geq 1) && (\mathrm{III}) \\
l_n &= f_{n+2} - f_{n-2} && && (\mathrm{IV}) \\
5f_n &= l_{n+2} - l_{n-2} && && (\mathrm{V})
\end{aligned}
$$

يمكن لاحقاً إثبات هذه العلاقات بشكل أسهل، ومع ذلك لو سلمنا بأن العلاقة (II) صحيحة فيصبح من السهل جدا إثبات العلاقتين $(\mathrm{IV}),(\mathrm{III})$.

برهان العلاقة (III) :

$$l_{n-1} = f_{n-2} + f_n, l_{n+1} = f_n + f_{n+2}$$

وعلى ذلك

$$
\begin{aligned}
l_{n-1} + l_{n+1} &= f_{n-2} + 2f_n + f_{n+2} \\
&= f_n - f_{n-1} + 2f_n + f_n + f_{n+1} \\
&= 4f_n + f_n \\
&= 5f_n
\end{aligned}
$$

برهان العلاقة (IV) :

لأن : $l_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ ، إذن :

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$$

وعلى ذلك :

$$f_{n+2} - f_{n-2} = f_n + f_{n+1} - (f_n - f_{n-1}) = f_{n+1} + f_{n-1}$$

ولأن $l_n = f_{n+1} - f_{n-1}$ ، إذن، $l_n = f_{n+2} - f_{n-2}$.

والآن عليك عزيزي القارئ أن تحاول إثبات باقي هذه العلاقات بمثل هذه الطريقة.

أعداد فيبوناتشي وأعداد لوكاس في الهندسة

الرابط الأساسي بين متسلسلتي فيبوناتشي ولوكاس في الهندسة يأتي من خلال النسبة الذهبية. فعند النظر في النسب المتتالية لأعداد فيبوناتشي ولوكاس. من خلال جدول النسب الموجود في الشكل $12-11$ ، فإنه يبدو أن النسبة بين كل حد والذي قبله تقترب من النسبة الذهبية ϕ .

والآن دعونا نتحقق من هذه الفكرة. وكمراجعة للنسبة الذهبية ، اعتبر $\overline{APB}$ حيث النقطة P تقسم $\overline{AB}$ بحيث $\frac{AB}{AP}=\frac{AP}{PB}$ (الشكل $13-11$).

لنفرض أن $x=\frac{AB}{AP}$ ، إذن :

$$x=\frac{AB}{AP}=\frac{AP+PB}{AP}=1+\frac{PB}{AP}=1+\frac{AP}{AB}=1+\frac{1}{x}$$

أي :

$$x=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

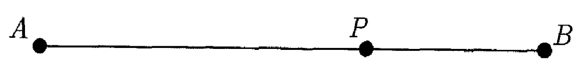
ومن السهل إيجاد جذري هذه المعادلة وهما :

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.6180339887 \quad , \quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0.6180339887,$$

$\frac{f_{n+1}}{f_n}$	$\frac{l_{n+1}}{l_n}$
$\frac{1}{1}=1.000000000$	$\frac{3}{1}=3.000000000$
$\frac{2}{1}=2.000000000$	$\frac{4}{3}=1.333333333$
$\frac{3}{2}=1.500000000$	$\frac{7}{4}=1.750000000$

$\frac{5}{3} = 1.666666667$	$\frac{11}{7} = 1.571428571$
$\frac{8}{5} = 1.600000000$	$\frac{18}{11} = 1.636363636$
$\frac{13}{8} = 1.625000000$	$\frac{29}{18} = 1.611111111$
$\frac{21}{13} = 1.615384615$	$\frac{47}{29} = 1.620689655$
$\frac{34}{21} = 1.619047619$	$\frac{76}{47} = 1.617021277$
$\frac{55}{34} = 1.617647059$	$\frac{123}{76} = 1.618421053$
$\frac{89}{55} = 1.6181818181$	$\frac{199}{123} = 1.617886179$
$\frac{144}{89} = 1.617977528$	$\frac{322}{199} = 1.618090452$
$\frac{233}{144} = 1.618055556$	$\frac{521}{322} = 1.618012422$
$\frac{377}{233} = 1.618025751$	$\frac{843}{521} = 1.618042226$
$\frac{610}{377} = 1.618037135$	$\frac{1.364}{843} = 1.618030842$
$\frac{987}{610} = 1.61832787$	$\frac{2.207}{1.364} = 1.618035191$

شكل 12 – 11



شكل 13 – 11

ولأننا نتعامل مع أطوال قطع مستقيمة، سنستخدم فقط الجذر الموجب a.

ولنفرض أن جذري المعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ هما a,b :

$$a^2 = a + 1 \qquad (\mathrm{I})$$

$$b^2 = b + 1 \qquad (\mathrm{II})$$

بضرب (I) في a^n حيث n عدد صحيح، نحصل على:

$$a^{n+2} = a^{n+1} + a^n \qquad (\mathrm{III})$$

وبضرب (II) في b^n حيث n عدد صحيح، نحصل على:

$$b^{n+2} = b^{n+1} + b^n \qquad (\mathrm{IV})$$

بطرح (IV) من (III) :

$$a^{n+2} - b^{n+2} = \left(a^{n+1} - b^{n+1}\right) + \left(a^n - b^n\right)$$

والآن لنقسم على $a - b = \sqrt{5}$ (لا يساوي الصفر):

$$\frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} + \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

لنفرض أن $t_n = \dfrac{a^n - b^n}{a-b}$ ، إذن $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$ والمعادلة الأخيرة هي تعريف متسلسلة فيبوناتشي.

كل ما تبقى ليتم عرضه من أجل أن تكون قادراً على استنتاج t_n لعدد n من أعداد فيبوناتشي f_n هو أن توجد $t_1 = 1, t_2 = 2$. لدينا:

$$t_1 = \frac{a^1 - b^1}{a-b} = 1$$

$$t_2 = \frac{a^2 - b^2}{a-b} = \frac{\left(a+b\right)\left(a-b\right)}{a-b} = \frac{\left(\sqrt{5}\right)\left(1\right)}{\left(\sqrt{5}\right)} = 1$$

إذن: $f_n = \dfrac{a^n - b^n}{a-b}$ حيث :

$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, n = 1,2,3,........$.

وهذا يوضح لنا كيف يتم التعبير عن أعداد فيبوناتشي في صيغة بينيه Binet form

بدلالة حدود لا تنتمي لأعداد فيبوناتشي.

مثال أوجد f_6 .

الحل

$$\begin{aligned} f_6 &= \frac{a^6 - b^6}{a-b} = \frac{\left(a^3 - b^3\right)\left(a^3 + b^3\right)}{a-b} = \frac{\left(a-b\right)\left(a^2 + ab + b^2\right)\left(a^3 + b^3\right)}{a-b} \\ &= \left(a^2 + ab + b^2\right)\left(a^2 - ab + b^2\right)\left(a+b\right) \\ &= \left(2\right)\left(4\right)\left(1\right) = 8 \end{aligned}$$

والآن من الصفحة قبل السابقة ، وبجمع $\left(\text{IV}\right)$ ، $\left(\text{III}\right)$:

$$a^{n+2} + b^{n+2} = \left(a^{n+1} + b^{n+1}\right) + \left(a^n + b^n\right)$$

نفرض أن: $w_n = a^n + b^n$. إذن:

$$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$$

وبالعمل على المتسلسلة w_n ، وبدراسة w_1, w_2 .

$$w_1 = a^1 - b^1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$w_2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = 3$$

ولأن $w_1 = 1, w_2 = 3$ ، $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ حيث w_n هو الحد النوني في متتابعة لوكاس ، فإن : $l_n = a^n + b^n$

حيث $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots$ w_{n+2}.

وهذا يوضح كيف يمكن التعبير عن أعداد لوكاس بصيغة بينيه.

مثال أثبت أن $f_{2n} = f_n \cdot l_n$ (الفقرة الأولى صفحة 348)

الحل

لأن $f_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}, l_n = a^n + b^n$ فإن :

$$f_n \cdot l_n = \left(\frac{a^n - b^n}{a-b}\right) \cdot \left(a^n + b^n\right) = \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a-b} = f_{2n}$$

بالعودة إلى جدول النسب في الشكل 12 − 11 ، سوف ندرس $\frac{f_{n+1}}{f_n}, \frac{l_{n+1}}{l_n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}}{\dfrac{a^n - b^n}{a-b}} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}$$

وبالقسمة على a^n $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{a - \dfrac{b^{n+1}}{a^n}}{1 - \dfrac{b^n}{a^n}}$.

ولأن $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ يكون لدينا :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$ (النسبة الذهبية)

هذه النتيجة تبرر الحدس الذي بدأنا به هذا الفصل.

نظرية 11-11

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$$

برهان هذه النظرية قد تم إثباته سابقاً.

نظرية 12-11

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l_{n+1}}{l_n} = \phi$$

من الشيق هنا أن نقدم برهاناً بديلاً عن برهان النظرية $11-11$

البرهان

لتكن: $x = \lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}$ ، ومن تعريف f_n لدينا :

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

إذن :

$$x = \lim_{n\to\infty}\frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f_{n-1}}{f_n}\right) = \lim_{n\to\infty}1 + \lim_{n\to\infty}\frac{f_{n-1}}{f_n}$$

ولكن لدينا :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}$$

إذن :

$$x = 1+\frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \phi$$ ●

صيغة بينيه الخاصة بـ f_n تمكننا بطريقة بسيطة من إثبات العلاقة الثانية في صفحة 339 .

$$l_n = f_{n-1} + f_{n+1} = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b} + \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \frac{\frac{a^n}{a} - \frac{b^n}{b} + a \cdot a^n - b \cdot b^n}{a-b}$$

$$= \frac{a^n\left(a + \frac{1}{a}\right) - b^n\left(b + \frac{1}{b}\right)}{a-b}$$

ولأن $b = \frac{-1}{a}, a = \frac{-1}{b}$ ؛ إذن:

$$l_n = \frac{a^n\left(a + \frac{1}{a}\right) - b^n\left(b + \frac{1}{b}\right)}{a-b} = \frac{a^n\left(a-b\right) - b^n\left(b-a\right)}{a-b} = a^n + b^n$$

والآن، لنعد لقوى ϕ التي هي في الأصل أساس مناقشتنا حول أعداد فيبوناتشي (انظر الشكل 7 − 11). ومن خلال معرفتنا بهذه الأعداد يمكننا صياغة الحد العام لقوى ϕ :

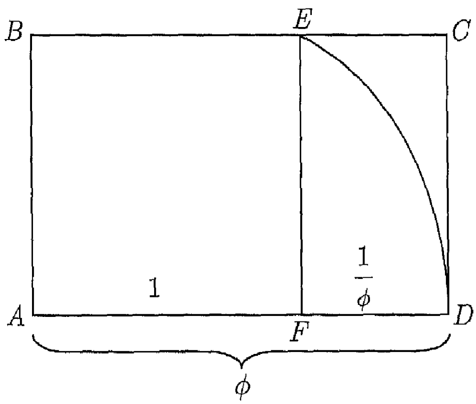
$$\phi^n = f_n\phi + f_{n-1}$$

نحن نملك الآن علاقتين واضحتين بين النسبة الذهبية وأعداد فيبوناتشي.

المستطيل الذهبي (مرة أخرى)

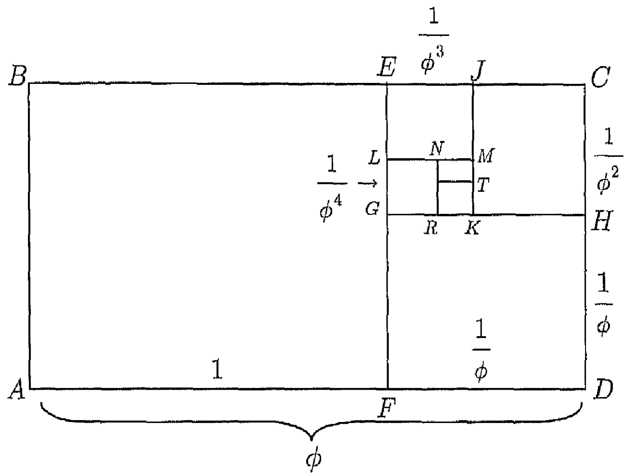
سنكمل مناقشتنا حول المستطيل الذهبي $ABCD$ ، والذي قدمناه في الشكل 6 − 11 عندما قمنا بإنشاء المربع داخله. وكما في الشكل 14 − 11 ، إذا كان $AF = 1$ فإن $FD = \frac{1}{\phi}$ ومن ذلك نستنتج أن $AD = 1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ ، إذن، بعدا

المستطيل $CDFE$ هما $CD = 1, FD = \frac{1}{\phi}$ وهو أيضاً مستطيل ذهبي. سنستكمل عملنا بإنشاء المربع $DFGH$ داخل المستطيل الذهبي $CDFE$، كما في الشكل $15 - 11$. عندها سنجد أن $CH = 1 - \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi^2}$ ، وبالتالي يصبح لدينا المستطيل $CHGE$ وهو أيضاً مستطيل ذهبي. وبالمثل يمكننا الحصول على المربع $CHKG$ في المستطيل الذهبي $CHGE$ ؛ ومن ثم يمكننا التوصل على أن:



شكل $14 - 11$

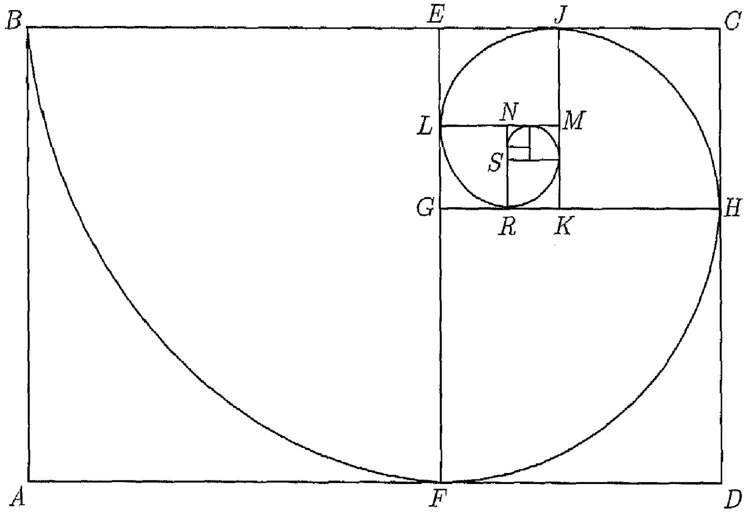
$EJ = \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} = \frac{\phi - 1}{\phi^2} = \frac{\frac{1}{\phi}}{\phi^2} = \frac{1}{\phi^3}$ (لاحظ أننا قد توصلنا إلى أن $\phi - \frac{1}{\phi} = 1$)، ومرة ثانية، لدينا مستطيل ذهبي جديد. هذه المرة هو المستطيل الذهبي $EJKG$ وباستكمال تلك العملية نحصل على المستطيل الذهبي $GKML$ ، والمستطيل الذهبي $NMKR$ ، وكذلك المستطيل الذهبي $MNST$ ، وهكذا.



شكل 15 – 11

لنفرض الآن أننا سنرسم أرباع الدوائر التالية ، (انظر الشكل 16 – 11)

المركز	نصف القطر
E	EB
G	GF
E	KH
M	MJ
N	NL
S	SR
.	.
.	.
.	

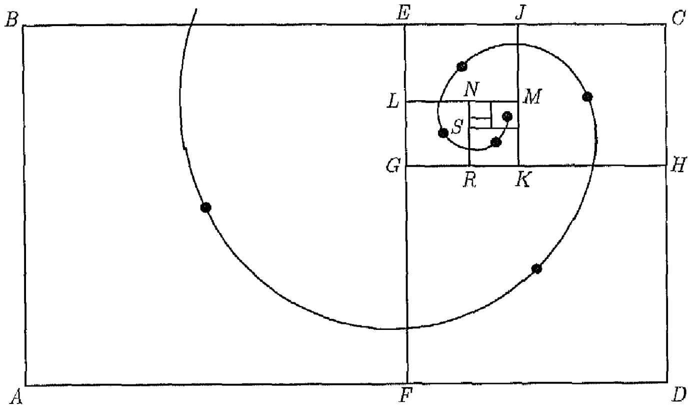


شكل 16 – 11

تكون النتيجة ذلك الحلزون اللوغاريتمي الذي يتضح في الشكل، كما أننا أيضاً نلاحظ أن مراكز هذه المربعات تقع على حلزون لوغاريتمي آخر (انظر الشكل 17 – 11).

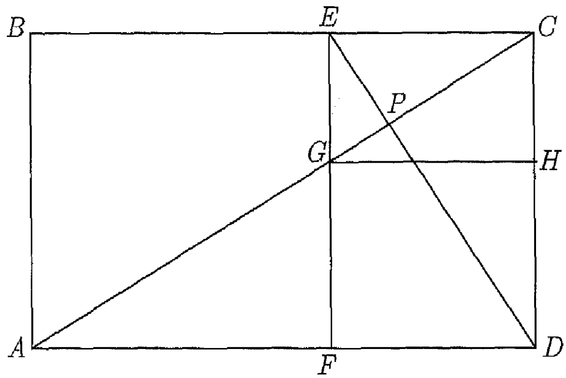
الحلزون الذي يوضحه الشكل 16 – 11 يتقارب إلى نقطة في المستطيل $ABCD$ ، وهذه النقطة هي نقطة تقاطع $\overline{AC}$ مع $\overline{DE}$ (الشكل 18 – 11). لاحظ مرة أخرى المستطيل الذهبي $ABCD$ على الشكل 18 – 11. ولقد استنتجنا سابقاً أن المربع $ABEF$ يعين مستطيلاً ذهبياً آخر هو $CEFD$. ولأن جميع المستطيلات الذهبية لها نفس الشكل، فإن المستطيل $ABCD$ يشابه المستطيل $CEFD$ وهذا يعني أن $\Delta ECD \sim \Delta CDA$ ، ومن ذلك $\angle CED \cong \angle DCA$ ، و $\angle DCA$ تتمم $\angle ECA$ ، إذن $\angle CED$ تتمم $\angle ECA$ ، إذن $\angle EPC$ يجب أن تكون قائمة، وهذا يعني أن $\overline{ED} \perp \overline{AC}$.

أي أنه إذا كان عرض مستطيل هو طول مستطيل آخر فإن المستطيلين يتشابهان، ويطلق على هذا النوع من المستطيلات " المستطيلات المتعاكسة" reciprocal rectangles. في الشكل 18 – 11 ، نجد أن المستطيل $ABCD$ والمستطيل $CEFD$ متعاكسان.



شكل 17 – 11

وعلاوة على ذلك، فإن قطري المستطيلين المتعاكسين يكونان متعامدين. وبنفس الطريقة التي اتبعناها سابقاً، نستطيع إثبات أن المستطيلين $CEFD, CEGH$ متعاكسان وقطريهما $\overline{ED}, \overline{CG}$ متعامدان ويتقاطعان في النقطة P. ويمكننا تعميم هذا البرهان ليشمل كل مستطيلين متتاليين في الشكل 16 – 11. وواضح أن النقطة P يجب أن تكون نهاية الحلزون في الشكل 16 – 11.

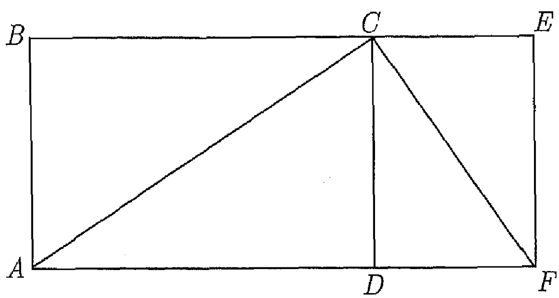


شكل $18 - 11$

نظرية 11-13 قطرا المستطيلين المتعاكسين متعامدان.

البرهان

لقد ناقشنا آنفاً الحالة التي فيها يقع أحد المستطيلين المتعاكسين داخل الآخر. والآن سنناقش الحالة التي لا توجد فيها أي منطقة مشتركة بين المستطيلين المتعاكسين (انظر الشكل $19 - 11$).



شكل $19 - 11$

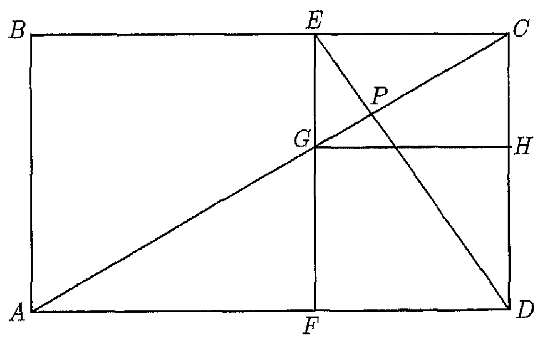
المستطيلان $ABCD, CEFD$ في الشكل $19 - 11$ متشابهان. إذن $\Delta FDC \sim \Delta CDA$ ، ومن نتائج هذا التشابه $\angle CAD \cong \angle FCD$. وبما أن $\angle CAD$ تتمم $\angle DCA$ ، إذن $\angle FCD$ تتمم $\angle DCA$. إذن $\overline{CF} \perp \overline{AC}$. ●

نظرية: 14-11 إذا تعامد زوج من الأقطار المتناظرة في مستطيلين وكان عرض أحد هذين المستطيلين هو طول المستطيل الآخر، فإن المستطيلين يكونان متعاكسين.

البرهان

في المستطيلين $ABCD, CEFD$ لدينا $\overline{ED} \perp \overline{AC}$ عند النقطة P (انظر الشكل $20 - 11$). سنحاول الآن إثبات أن هذين المستطيلين متشابهان.

كلتا الزاويتين $\angle CED, \angle DCA$ تتممان $\angle ECA$. إذن، $\angle CED \cong \angle DCA$ ، وهذا يمكننا من استنتاج أن $\Delta CED \sim \Delta DCA$ ، وهذا يقتضي أن يتشابه المستطيلان $ABCD, CEFD$ (لأن الأضلاع المتناظرة متناسبة). ●



شكل $20 - 11$

لنظرية $14-11$ تطبيقات شيقة، فهي على سبيل المثال تعطينا طريقاً مختلفاً لإنشاء المستطيلات الذهبية. فنستطيع ببساطة أن نبدأ بالمستطيل الذهبي $ABCD$. ثم نرسم من النقطة D عموداً على $\overline{AC}$. ومن نقطة تقاطع هذا العمود مع $\overline{BC}$ التي نرمز لها بـ E نرسم عموداً إلى $\overline{AD}$، لنكمل المستطيل الذهبي الثاني. وبتكرار مثل هذه المعالجة نحصل على العديد من المستطيلات الذهبية.

المثلث الذهبي The Golden Triangle

لعل إعجابنا بالمستطيل الذهبي يدفعنا للبحث عن أشكال ذهبية أخرى، وهنا يظهر مثلث سيصيبنا بالدهشة والإعجاب أيضاً، وهذا المثلث مبني على النسبة الذهبية وعلى عدة خصائص شيقة أخرى تناظر بشكل ما خصائص المستطيل الذهبي.

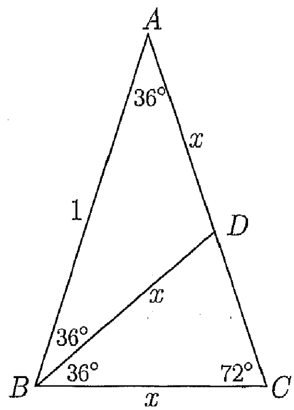
وسنبدأ بمثلث متطابق الضلعين قياس زاوية رأسه $36°$، ثم ننشئ $\overline{BD}$ منصفاً للزاوية $\angle ABC$ (انظر الشكل $21-11$). ومن ذلك نستنتج أن $m\angle DBC = 36°$، وعليه $\Delta ABC \sim \Delta BCD$. والآن لنفرض أن: $AD = x, AB = 1$ ولأن ΔABC متطابق الضلعين. إذن، نستنتج أن. $BC = BD = AD = x$. ومن تشابه $\Delta ABC, \Delta BCD$ نجد أن $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$.

وهذا يقود إلى أن:

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(تم حذف الجذر السالب حيث إننا نتعامل مع أطوال). ويمكننا تسمية $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ حيث النسبة (ضلع ÷ قاعدة) للمثلث ABC هي $\phi = \frac{1}{x}$.

ولذلك نطلق على ΔABC المثلث الذهبي.



شكل 21 – 11

وبأخذ المنصفات التالية تتابعياً $\overline{BD}, \overline{CE}, \overline{DF}, \overline{EG}, \overline{FH}$ لزوايا القاعدة لكل مثلث قياسات زواياه $36°, 72°, 72°$ ، سنحصل على متسلسلة من المثلثات الذهبية (انظر الشكل 22 – 11)، وهذه المثلثات الذهبية (والتي قياسات زواياها $36°, 72°, 72°$) هي $\Delta ABC, \Delta BCD, \Delta CDE$ $\Delta DEF, \Delta EFG, \Delta FGH$ ، ولو كانت المساحة تسمح لأمكننا رسم العديد من منصفات الزوايا وبالتالي تكوين مزيد من المستطيلات الذهبية.

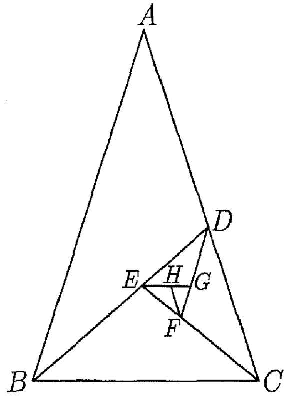
سنلاحظ أن دراستنا للمثلث الذهبي تتوازي مع المستطيل الذهبي، وسنبدأ بفرض أن $HG = 1$ (الشكل 22 – 11)، ولأن النسبة (ضلع ÷ قاعدة) في المثلث الذهبي هي ϕ ؛ إذن في ΔFGH :

$$\frac{GF}{HG} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow \frac{GF}{1} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow GF = \phi$$

بالمثل، في المثلث الذهبي EFG : $\frac{FE}{GF} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow \frac{FE}{\phi} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow FE = \phi^2$

وفي ΔEFG : $\frac{ED}{FE} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow \frac{ED}{\phi^2} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow ED = \phi^3$

ومرة أخرى في المثلث الذهبي CDE : $\frac{DC}{ED} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow \frac{DC}{\phi^3} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow DC = \phi^4$



شكل 22 – 11

وكذلك في المثلث الذهبي BCD :

$$\frac{CB}{DC} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow \frac{CB}{\phi^4} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow CB = \phi^5$$

وأخيراً، في المثلث الذهبي ABC :

$$\frac{BA}{CB} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow \frac{BA}{\phi^5} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow BA = \phi^6$$

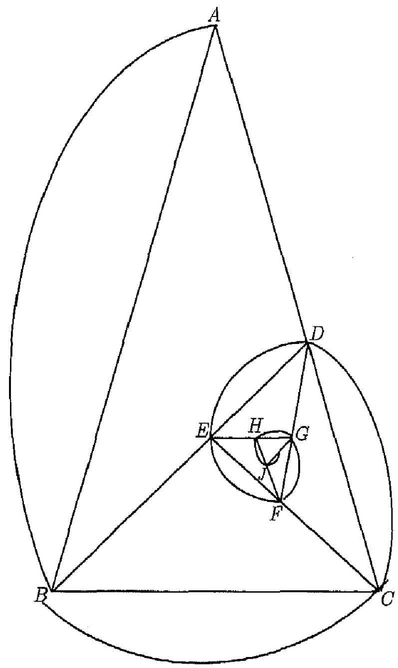
وباستخدام معرفتنا لقوى ϕ (وقد حصلنا عليها سابقاً) يمكننا تلخيص النتائج التالية :

$$\begin{aligned}
HG &= \phi^0 = 0\phi + 1 = f_0\phi + f_{-1}\phi \\
GF &= \phi^1 = 1\phi + 0 = f_1\phi + f_0 \\
FE &= \phi^2 = 1\phi + 1 = f_2\phi + f_1 \\
ED &= \phi^3 = 2\phi + 1 = f_3\phi + f_2 \\
DC &= \phi^4 = 3\phi + 2 = f_4\phi + f_3 \\
CB &= \phi^5 = 5\phi + 3 = f_5\phi + f_4 \\
BA &= \phi^6 = 8\phi + 5 = f_6\phi + f_5
\end{aligned}$$

وكما فعلنا مع المستطيل الذهبي نستطيع استنتاج الحلزون اللوغاريتمي بواسطة رسم أقواس تصل بين رؤوس المثلثات الذهبية المتتالية (انظر الشكل $23-11$) ونستطيع رسم هذا الأقواس الدائرية كما في الشكل $23-11$.

وهكذا رأينا أن هناك عدداً كبيراً من العلاقات الرائعة والشيقة والتي تنبثق من النسبة الذهبية، فبعد أن تعرضنا للمثلث الذهبي، يكون التحرك المنطقي هو التحرك نحو تطبيقات تدور حول المضلع الخماسي المنتظم والنجمة الخماسية، التي هي في الأساس تتألف من عدد من المثلثات الذهبية. ونحن نقدم عدداً من هذه العلاقات كتدريبات نتركها لك للعمل عليها مع أملنا أن يشجعك ذلك على زيادة جرعة دراستك للنسبة الذهبية وأعداد فيبوناتشي. وأثناء ذلك بالتأكيد سوف تقدر الصلة الوثيقة بين الهندسة وفروع الرياضيات الأخرى.

مركز الدائرة عند النقطة	D	E	F	G	H	J	...
القوس	$\overset{\frown}{AB}$	$\overset{\frown}{BC}$	$\overset{\frown}{CD}$	$\overset{\frown}{DE}$	$\overset{\frown}{EF}$	$\overset{\frown}{FG}$	...



شكل 23 – 11

تدريبات

أثبت كلاً من العلاقات التالية في التدريبات 4 – 1 :

.1 .a $\frac{f_{12}}{f_6}=f_5+f_7$ .b $\frac{l_{12}}{l_4}=l_8-1$

.2 .a $\frac{f_{10}}{f_5}=f_4+f_6$ .b $\frac{l_{15}}{l_5}=l_{10}+1$

.3 .a $f_{11}=f_5^2+f_6^2$ .b $\frac{l_9}{l_3}=l_6+1$

.4 .a $f_9^2-4\cdot f_4\cdot f_7=f_6^2$ .b $\frac{l_6}{l_2}=l_4-1$

استخدام الجدول الموجود في الشكل 9 − 11 لإكمال الفراغ في التدريبات 10 − 5

5. $f_n^2 + f_{n+1}^2 = (\ldots)$

6. $f_{2n} = f_{n+1}^2 - (\ldots)$

7. $f_{-n} = f_n \cdot (\ldots)$ (ربما ستحتاج لإكمال الجدول 9 − 11).

8. $f_{n+1} + f_{n-1} = f_{2n} \div (\ldots)$.

9. $f_{n+3}^2 - f_{n-3}^2 = f_6 \cdot (\ldots)$.

10. $\sum_{m=1}^{6} f_m = (\ldots) - 1$

11. مثّل $\sum_{m=1}^{5} f_m^2$ هندسياً .

12. مثّل $\sum_{m=1}^{8} f_m^2$ هندسياً .

عبر في التدريبات 16 − 13 بطريقة أخرى تحتوي على حدود من أعداد فيبوناتشي.

13. $\sum_{m=1}^{n} f_{4m}$

14. $\sum_{m=1}^{n} f_{4m-1}$

15. $\sum_{m=1}^{n} f_{4m-2}$

16. $\sum_{m=1}^{n} f_{4m-3}$

أثبت التدريبات 21 − 17 باستخدام الاستقراء الرياضي.

17. $\sum_{m=1}^{n} f_{2m} = f_{2n+1} - 1$

18. $\sum_{m=1}^{n} f_m^2 = f_n \cdot f_{n+1}$

19. $f_n^2 - f_{n+2} \cdot f_{n-2} = (-1)^n$

20. $f_{2n} + f_{n-1}^2 = f_{n+1}^2$

21. $f_{2n} = f_n \cdot f_{n-1} + f_n \cdot f_{n+1}$.

22 − 25. أثبت بالاستقراء الرياضي كل النتائج التي حصلت عليها في التدريبات 16 − 13.

26. أثبت أن مجموع المجاميع الواردة في التدريبات $16-13$ تساوي $\sum_{m=1}^{4n} f_m$.

استخدام الجدولين بالشكلين $11-9,11-11$ لإكمال الفراغ في التدريبات $27-30$

27. $(\ldots)+l_{n+1}^2=5f_{2n+1}$

28. $(\ldots)=2+l_{4n}$

29. $5f_{2n}^2=(\ldots)-2$

30. $5f_{2n}^2=(\ldots)-4$

31. مثِّل $\sum_{m=1}^{5} l_m^2$ هندسياً .

32. مثِّل $\sum_{m=1}^{8} l_m^2$ هندسياً .

عبر في التدريبات $36-33$ بطريقة أخرى تحتوي على حدود من أعداد فيبوناتشي.

33. $\sum_{m=1}^{n} l_{4m}$

34. $\sum_{m=1}^{n} l_{4m-1}$

35. $\sum_{m=1}^{n} l_{4m-2}$

36. $\sum_{m=1}^{n} l_{4m-3}$

37. أثبت نظرية $9-11$ باستخدام الاستقراء الرياضي.

38. أثبت نظرية $10-11$ باستخدام الاستقراء الرياضي.

39. أثبت – بمثال – كيف يمكننا تمثيل أول 25 عدداً طبيعياً كمجموع من أعداد مختلفة من أعداد لوكاس.

40. أثبت كيف يمكن لأي عدد من الأعداد الطبيعية أن يتم التعبير عنه كمجموع أعداد مختلفة من أعداد فيبوناتشي.

ولحل هذا التدريب إليك بعض الإرشادات :

(على سبيل المثال $15 = f_3 + f_5 + f_6 = f_3 + f_7$ أو $45 = f_4 + f_6 + f_9$ ، ..... إلخ). أولاً حاول أن تمثل الأعداد من 1 إلى 100 كحدود من أعداد فيبوناتشي. ثم حاول أن تثبت أن أي عدد طبيعي يمكن تمثيله كحدود من أعداد فيبوناتشي. هل يمكن لنا أن نعبر عن جميع الأعداد الطبيعية كحدود من أعداد فيبوناتشي إذا فُقد أي عدد من أعداد فيبوناتشي؟ أو إذا فُقد أي عددين من أعداد فيبوناتشي؟ وضح بالأمثلة أنه إذا فُقد f_1 فإن أي عدد طبيعي يمكن تمثيله كحدود من أعداد فيبوناتشي (باستثناء f_1) فقط بطريقة واحدة إذا لم يتم اختيار حدين متتاليين (f_k, f_{k+1}) على سبيل المثال $17 = f_2 + f_4 + f_7$.

41. قم بإعداد جدول للفروق بين حدود متسلسلة فيبوناتشي. وقد يساعدك في عمل هذا الجدول إذا بدأت من الجدول المتاح بالشكل 24 – 11 وقمت بعد ذلك بإكماله. لاحظ النمط!

5	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	5	8
−8	5	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	
13	−8	5	−3	2	−1	1	0	1	1		
−21	13	−8	5	−3	2	−1	1	0			
34	−21	13	−8	5	−3	2	−1				
−55	34	−21	13	−8	5	−3					
89	−55	34	−21	13	−8						
−144	89	−55	34	−21							

شكل 24 – 11

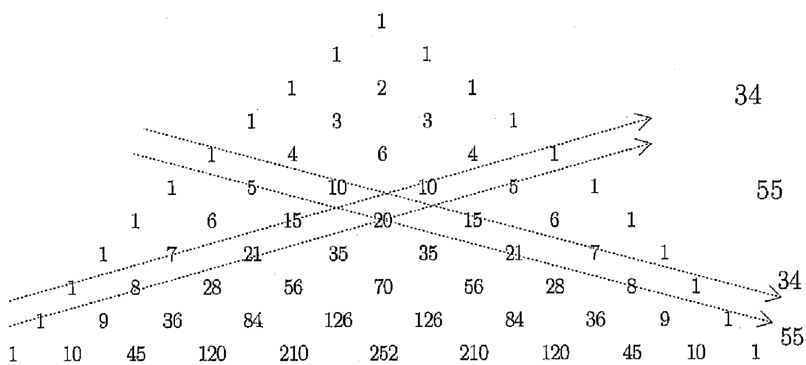
42. قم بإعداد جدول للفروق بين أعداد لوكاس كما فعلت مع أعداد فيبوناتشي في التدريب السابق.

43. بدراسة قابلية القسمة لأعداد فيبوناتشي. لاحظ أن $f_5 \big| f_{10}$ (وتقرأ f_5 تقسم f_{10})، $f_5 \big| f_{15}$ وأيضاً $f_4 \big| f_8 , f_4 \big| f_{12} , f_4 \big| f_{16}$ ، وهكذا. أوجد النمط العام لقابلية القسمة لأعداد فيبوناتشي موضحاً السبب.

44. اقسم كلاً من $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_{31}$ على 7 وافحص البواقي. ثم اقسم $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_{31}$ على 5 وافحص البواقي. ثم حدد ما هو استنتاجك فيما يتعلق بالبواقي ؟ ما هو العدد الطبيعي الذي يقسم أعداد فيبوناتشي؟ حاول القسمة على باقي الأعداد الطبيعية واستنتج أنماطاً مختلفة.

45. من خلال مثلث باسكال الموضح في الشكل $25 - 11$. هل تستطيع إيجاد مجاميع الأعداد والتي تنتج متسلسلة فيبوناتشي؟ هل تستطيع تبرير ذلك.

استخدم صيغة بينيه الخاصة بكل من f_n ، l_n لإيجاد قيمة التعبيرات الواردة في التدريبات $49 - 46$.



شكل $25 - 11$

46. f_7 47. l_7

48. l_9 49. f_9

أثبت كلاً من المتطابقات التالية في التدريبات 55 − 50 باستخدام صيغة بينيه لكل من f_n ، l_n.

50. $l_n = f_{n-1}+f_{n+1}$ 51. $5f_n = l_{n-1}+l_{n+1}$

52. $l_n = f_{n-2}+f_{n+2}$ 53. $5f_n = l_{n-2}+l_{n+2}$

54. $5f_n^2 = l_n^2\text{-}4\left(-1\right)^n$ 55. $5f_{2n+1} = l_{n+1}^2+l_n^2$

56. أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن $f_n = \dfrac{a^n - b^n}{a-b}$ حيث $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ، $n = 1,2,3,\dots$.

57. أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن: $l_n = a^n + b^n$ حيث a,b تم تعريفهما في التدريب السابق.

58. إذا كان خارج القسمة $\dfrac{1}{1-x-x^2} = f_1 + f_2x + f_2x^2 + \dots + f_nx^{n-1} + \dots$,

حيث f_n هو الحد النوني من متتابعة فيبوناتشي. فوضح لماذا هذه العلاقة صحيحة؟

59. باعتبار أن قوى $a = \phi$ (النسبة الذهبية) هي :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\
a^2 &= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\\
a^3 &= \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2}\\
a^4 &= \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\\
a^5 &= \frac{22+10\sqrt{5}}{4} = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}\\
a^6 &= \frac{36+16\sqrt{5}}{4} = \frac{18+8\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

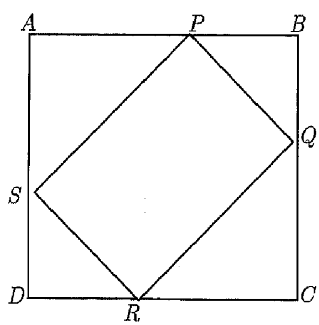
ناقش هذه النتائج ومثّل قوى $a = \phi$ بدلالة a مثل:

$$\begin{aligned}
a^2 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = a+1\\
a^3 &= 2a+1\\
a^4 &= 3a+1
\end{aligned}$$

.

.

60. استنتج بعض العلاقات الإضافية بين النسبة الذهبية وأعداد فيبوناتشي ولوكاس.
61. أثبت أن أطوال أضلاع أي مثلث لا يمكن أن تكون ثلاثة أعداد متتالية سواء من أعداد فيبوناتشي أو لوكاس.
62. أثبت أنه إذا كانت النقاط P, Q, R, S تقسم كل ضلع من أضلاع المربع $ABCD$ إلى النسبة الذهبية كما يتضح في الشكل $26-11$، فإن الرباعي $PQRS$ يكون مستطيلاً ذهبياً.

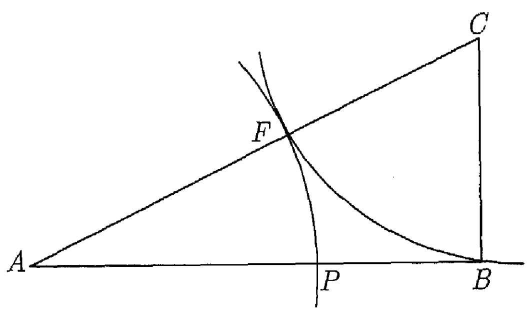


شكل $26-11$

63. حدد الجزء الذهبي على النجمة الخماسية المنتظمة في أكبر عدد ممكن من الأماكن داخلها.

64. حدد الجزء الذهبي على الخماسي المنتظم في أكبر عدد ممكن من الأماكن داخله.

65. أثبت أن الإنشاء التالي يقسم $\overline{AB}$ حسب النسبة الذهبية : أنشئ $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ عند النقطة B بحيث $BC = \frac{1}{2}(AB)$. ارسم $\overline{AC}$ (انظر الشكل 27 – 11). ثم ارسم الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها $\overline{BC}$ لتقطع $\overline{AC}$ في النقطة F. مركزها C ونصف قطرها $\overline{BC}$ لتقطع $\overline{AC}$ في النقطة F. النقطة P هي نقطة تقاطع الدائرة التي مركزها النقطة A ونصف قطرها $\overline{AF}$ ، وهي النقطة التي تقسم $\overline{AB}$ إلى القسم الذهبي أي $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$.



شكل 27 – 11

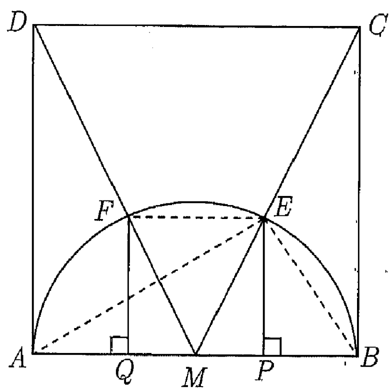
66. أثبت في الشكل 22 – 11 أن مساحة ΔBCD : مساحة ΔABD : مساحة $\Delta ABC = 1 : \phi : \phi^2$.

67. أثبت أن $\sin 18^\circ = \frac{1}{2\phi}$.

68. أوجد $\cos 27^\circ$ بدلالة ϕ.

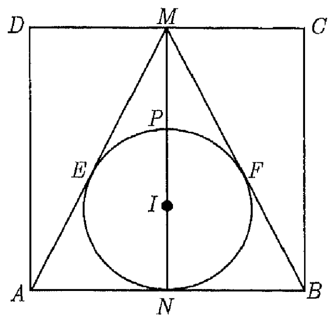
69. أثبت أن منصف زاوية الرأس في المثلث الذهبي يقسم كلاً من منصفي الزاويتين الباقيتين حسب النسبة الذهبية.

70. أثبت أن الإنشاء التالي يقسم $\overline{QB}$ حسب النسبة الذهبية: ابدأ بالمربع $ABCD$ (انظر الشكل 28 − 11). ثم ارسم نصف دائرة داخل المربع على $\overline{AB}$ والتي نقطة منتصفها هي النقطة M ، ثم ارسم $\overline{CM}, \overline{DM}$ ليقطعا نصف الدائرة في E, F على الترتيب. ومن النقطة E أسقط عموداً على $\overline{AB}$ يقطعها في النقطة P ، ومن النقطة F أسقط عموداً على $\overline{AB}$ يقطعها في النقطة Q. $\phi = \frac{PQ}{BP}$. (الخطوط المنقوشة في الشكل 28 − 11 تم رسمها كإرشاد).



شكل 28 − 11

71. أثبت أن الإنشاء التالي يقسم $\overline{MN}$ حسب النسبة الذهبية: ابدأ بالمربع $ABCD$ حيث M منتصف $\overline{CD}$. ارسم الدائرة I كدائرة داخلية للمثلث AMB تمس أضلاعه $\overline{AM}, \overline{BM}, \overline{AB}$ عند النقاط E, F, N على الترتيب (انظر الشكل $29-11$)، $\overline{MN}$ تقطع الدائرة I عند النقطة P، وعليه يكون لدينا النقطة P تقسم $\overline{MN}$ حسب النسبة الذهبية $\dfrac{PN}{MN} = \dfrac{MP}{PN}$.



شكل $29-11$

72. أثبت أن أطوال المتوسطات الخارجة من زوايا القاعدة في المثلثات المتتالية تشكل متسلسلة فيبوناتشي.

73. أثبت أن مساحة الخماسي المنتظم الذي طول ضلعه s تساوي : $\dfrac{5s^2\phi}{4\sqrt{3-\phi}}$.

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي – إنجليزي

أ

ارتفاعات المثلث	Altitudes of a triangle
استقامة (نقاط تقع على مستقيم واحد)	Collinearity
استقراء رياضي	Mathematical induction
الخط المنصف للمثلث	Midline of a triangl
إنشاء	Construction
أبراهام بوس	Abraham ،Bosse
أبولونيوس	Apollonius
أرقام عربية	Arabic numbers
أطوال أنصاف اقطار الدوائر الخارجية للمثلث	Exradii lengths
أعداد فيبوناشي	Fibonacci numbers
أعداد لوكاس	Lucas numbers
أعمدة	Perpendiculars

Shortest distance	أقصر مسافة
Equiradii	أنصاف أقطار الدوائر الأربع لمثلث

ب

Pappus of Alexandria	بابوس الإسكندري
Pascal, Blaise	باسكال ، بليز
Ptolemy	بطليموس
Poncelet, Jean- Victor	بونسيليه ، جان فيكتور
Betweenness	بينية

ت

Nomenclature	تسمية
Similarity	تشابه
Similarity of triangles	تشابه المثلثات
Charles Julien Brianchon	تشارلز جوليان براينشون
Charles Davies	تشارلز ديفيز
Harmonic division	تقسيم توافقي
Equivalence	تكافؤ
Concurrency	تلاق في نقطة
Proportion	تناسب

ث

Duality	ثنوية

ج

جيرارد ديزارغ	Gerard Desargues
جيرجوني ، جوزيف دياز	Gergonne, Joseph-Diaz
جيوفاني شيفا	Giovanni Ceva

ح

حد رابع متناسب	Fourth proportion
حلزون لوغاريتمي	Logarithmic spiral

خ

خط أويلر	Euler line
خط سيمسون	Simson line
خماسي	Pentagon

د

دائرة النقاط التسع	Nine-point circle
دائرة محيطة بمثلث	Circumcircle
دوائر مماسة لأضلاع مثلث	Equicircles

ر

رباعي دائري	Cyclic quadrilateral
روبرت سيمسون	Robert Simson
رؤوس	Vertices
رينيه ديكارت	Rene Descartes

س

ستيوارت ، ماثيو	Stewart, Matthew
سداسي	Hexagon
سموجرفيسكي	Smogorzhevski

ش

شبه منحرف	Trapezoid
شكل رباعي	Quadrilateral

ص

صورة كروية مناظرة	Analogue spherical
صيغة براهاماجوبتا	Brahmagupta's formula
صيغة بينيه	Binet form

ط

طرق البرهان	Proving methods

ف

فن معماري	Architecture
فيبوناشي	Fibonacci
فيتا ، فرانسيسكوس	Vieta,Franciscus
فيثاغورس	Pythagoras
فيرما	Fermat

ق

قاطع	Secant
قطاع	Sector
قطرا شكل رباعي	Diagonals of a quadrilateral
قطعة	Segment
قطوع مخروطية	Conic sections

ك

كارل فيورباخ	Karl Feuerbach
كتاب العناصر لإقليدس	Elements
كتاب المجسطي لبطليموس	Almagest

ل

لجندر ، أدريان	Legender, Adrien
لوكاس ، إدوارد فرانسوا أناتول	Lucas, Francois-Edouard- Anatole
ليوناردو بيزا	Leonardo of pisa

م

مايكل	Miquel
متباينات	Inequalities
متوازي أضلاع	Parallelogram
مثلث المواقع	Pedal triangle
مثلث المواقع من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث	Orthic triangle

مثلث باسكال	Pascal triangle
مثلث حاد الزوايا	Acute triangle
مثلث قائم الزاوية	Right triangle
مثلث متطابق الأضلاع	Equilateral triangle
مثلث متطابق الضلعين	Isosceles triangle
مثلث متوسط	Medial triangle
مثلث مختلف الأضلاع	Scalene triangle
مثلث منفرج الزاوية	Obtuse triangle
مثلثات منشأة داخل دائرة	Triangles in circle inscribed
مجموعة الفائض	Redundant set
محاور أساسية	Radical axes
محل هندسي	Locus
مربع	Square
مركز الدائرة الخارجية	Excenter
مركز الدائرة الداخلية	Incenter
مركز الدائرة المحيطة	Circumcenter
مساحة	Area
مسألة أبولونيوس	Apollonius problem
مستطيل ذهبي	Golden rectangle
مستطيلات متعاكسة	Reciprocal rectangles
مستقيم مار برأس	Cevian

مضلع	Polygon
معين	Rhombus
مغالطة	Fallacy
مماس	Tangent
منصف زاوية	Angel bisector
منصفات عمودية	Perpendicular bisectors
مواز	Parallel
موريتز باش	Moritz Pasch
موطئ مستقيم على آخر	Feet

ن

نابوليون	Napoleon
ناجل	Nagel
نسبة التشابه	Ratio of similitude
نسبة ذهبية	Golden ratio
نصف المحيط	Semiperimeter
نصف قطر الدائرة	Radius
نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث	Inradius
نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث	Circumradius
نظام تقاطع الارتفاعات	Orthocentric system
نقاط على محيط دائرة واحدة	Concyclic points
نقطة المنتصف	Midpoint

نقطة تساوي الزوايا	Equiangular point
نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث	Oorthocenter
نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث	Centroid of triangle
نقطة متوسطة	Centerpoint
نيوتن	Newton

هـ

هيرون الإسكندري	Heron of Alexandria

و

وليام والاس	Williiam Wallace
وتر	Chord

ثانياً: إنجليزي – عربي

A

Acute triangle	مثلث حاد الزوايا
Almagest	كتاب المجسطي لبطليموس
Altitudes of a triangle	ارتفاعات المثلث
Analogue spherical	صورة كروية مناظرة
Angel bisector	منصف زاوية
Apollonius	أبولونيوس
Apollonius problem	مسألة أبولونيوس
Arabic numbers	أرقام عربية
Architecture	فن معماري
Area	مساحة

B

Betweenness	بينية
Binet form	صيغة بينيه
Bosse, Abraham	أبراهام بوس
Brahmagupta's formula	صيغة براهاماجوبتا
Brianchon Charles Julien	تشارلز جوليان براينشون

C

Centerpoint	نقطة متوسطة
Centroid of triangle	نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث
Ceva	شيفا

مستقيم مار برأس	Cevian
تشاؤلز دافيز	Charles Davies
وتر	Chord
مركز الدائرة المحيطة	Circumcenter
دائرة محيطة بمثلث	Circumcircle
نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث	Circumradius
استقامة (نقاط تقع على مستقيم واحد)	Collinearity
تلاق في نقطة	Concurrency
نقاط على محيط دائرة واحدة	Concyclic points
قطوع مخروطية	Conic sections
إنشاء	Construction
رباعي دائري	Cyclic quadrilateral

D

قطرا شكل رباعي	Diagonals of a quadrilateral
ثنوية	Duality

E

كتاب العناصر لإقليدس	Elements
نقطة تساوي الزوايا	Equiangular point
دوائر مماسة لأضلاع مثلث	Equicircles
مثلث متطابق الأضلاع	Equilateral triangle
أنصاف أقطار الدوائر الأربع لمثلث	Equiradii
تكافؤ	Equivalence

Euler line	خط أويلر
Excenter	مركز الدائرة الخارجية
Exradii lengths	أطوال أنصاف اقطار الدوائر الخارجية للمثلث

F

Fallacy	مغالطة
Feet	موطئ مستقيم على آخر
Fermat	فيرما
Fibonacci	فيبوناشي
Fibonacci numbers	أعداد فيبوناشي
Fourth proportion	حد رابع متناسب

G

Gerard Desargues	جيرارد ديزارغ
Gergonne, Joseph-Diaz	جيرجوني ، جوزيف دياز
Golden ratio	نسبة ذهبية
Golden rectangle	مستطيل ذهبي

H

Harmonic division	تقسيم توافقي
Heron of Alexandria	هيرون الإسكندري
Hexagon	سداسي

I

Incenter	مركز الدائرة الداخلية
Inequalities	متباينات
Inradius	نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث

Inscribed triangles in circle	مثلثات منشأة داخل دائرة
Isosceles triangle	مثلث متطابق الضلعين

K

Karl Feuerbach	كارل فيورباخ

L

Legender, Adrien	لجندر، أدريان
Leonardo of pisa	ليوناردو بيزا
Locus	محل هندسي
Logarithmic spiral	حلزون لوغاريتمي
Lucas numbers	أعداد لوكاس
Lucas, Francois-Edouard- Anatole	لوكاس، إدوارد فرانسوا أناتول

M

Mathematical induction	استقراء رياضي
Medial triangle	مثلث متوسط
Midline of a triangl	الخط المنصف للمثلث
Midpoint	نقطة المنتصف
Miquel	مايكل
Moritz Pasch	موريتز باش

N

Nagel	ناجل
Napoleon	نابوليون
Newton	نيوتن
Nine-point circle	دائرة النقاط التسع

Nomenclature	تسمية

O

Obtuse triangle	مثلث منفرج الزاوية
Orthic triangle	مثلث المواقع من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث
Orthocenter	نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث
Orthocentric system	نظام تقاطع الارتفاعات

P

Pappus of Alexandria	بابوس الإسكندري
Parallel	مواز
Parallelogram	متوازي أضلاع
Pascal triangle	مثلث باسكال
Pascal, Blaise	باسكال، بليز
Pedal triangle	مثلث المواقع
Pentagon	خماسي
Perpendicular bisectors	منصفات عمودية
Perpendiculars	أعمدة
Polygon	مضلع
Poncelet, Jean Victor	بونسيليه، جان فيكتور
Proportion	تناسب
Proving methods	طرق البرهان
Ptolemy	بطليموس
Pythagoras	فيثاغورس

Q

Quadrilateral	شكل رباعي

R

Radical axes	محاور أساسية
Radius	نصف قطر الدائرة
Ratio of similitude	نسبة التشابه
Reciprocal rectangles	مستطيلات متعاكسة
Redundant set	مجموعة الفائض
Rene Descartes	رينيه ديكارت
Rhombus	معين
Right triangle	مثلث قائم الزاوية
Robert Simson	روبرت سيمسون

S

Scalene triangle	مثلث مختلف الأضلاع
Secant	قاطع
Sector	قطاع
Segment	قطعة
Semiperimeter	نصف المحيط
Shortest distance	أقصر مسافة
Similarity	تشابه
Similarity of triangles	تشابه المثلثات
Simson line	خط سيمسون

Smogorzhevski	سموجرفيسكي
Square	مربع
Stewart, Matthew	ستيوارت ، ماثيو

T

Tangent	مماس
Trapezoid	شبه منحرف

V

Vertices	رؤوس
Vieta,Franciscus	فيتا ، فرانسيسكوس

W

Williiam Wallace	وليام والاس

كشاف الموضوعات

أ

ت